

# ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH  
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,  
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE  
BAND 68 HEFT 7/8  
DER GANZEN REIHE 373. BANDES 7. u. 8. HEFT

KURATORIUM:  
M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN. E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT  
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1922 erscheinen Bd. 67, 68 und 69 à 8 Hefte. Preis von Band 68 für Belgien, Luxemburg und Frankreich Fr. 47.—; Dänemark Kr. 20.—; England £ -19.—; Finnland Marka 60.—; Holland fl. 11.—; Japan £ -19.—; Italien Lire 60.—; Norwegen Kr. 24.—; Schweden Kr. 20.—; Schweiz Fr. 20.—; Spanien Pes. 24.—; U.S.A. \$ 4.—.

Ausgegeben am 4. Oktober 1922.

## Inhalt.

	Seite
1. P. Lenard. Über die Lichtwirkung auf Zinksulfid . . . . .	553
2. Maximilian Camillo Neuburger. Der Feinbau der Atomkerne und die Veränderung des Coulombschen Gesetzes im Innern der Kerne. I. Die Atomkerne von Lithium und Isohelium . . . . .	574
3. George Jaffé. Grundriß einer Theorie des anisotropen Strahlungsfeldes . . . . .	583

---

Verlag von Carl Fromme, G.m.b.H., Wien u. Leipzig 1907

---

### **Erklärung der Gravitation,** der Molekularkräfte, des Lichtes, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen aus gemeinsamer Ursache, auf rein mechanischem, atomistischem Wege

von

**Dr. Johann Sahulka**

==== Preis zurzeit M. 120.— =====

*Zu beziehen durch alle Buchhandlungen*

## Neukonstruktionen

geodätischer und sonstiger wissenschaftlicher Instrumente  
und Apparate nach Angaben übernimmt unter  
vollster Wahrung und Sicherstellung  
des geistigen Eigentums des  
Auftraggebers die

**Konstruktions- u. Versuchswerkstättenabteilung der  
Industrie-Neuland Aktiengesellschaft**

Telephon 50784

**München**

Pachauer Str. 13







# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 68.

## 1. *Über die Lichtwirkung auf Zinksulfid;* *von P. Lenard.*

1. Bei den sehr zahlreichen Versuchen, in welchen Phosphore<sup>1)</sup> langdauernder Belichtung ausgesetzt wurden, war bleibende Veränderung infolge der Belichtung doch nur in einem Falle bemerkbar geworden, nämlich bei den Zinksulfidphosphoren. Diese werden im Licht geschwärzt. Es ist dies von Herrn W. Hausser bereits angegeben worden, der die Erscheinung wohl zuerst bemerkte und zu untersuchen begann<sup>2)</sup>, dann auch in einer meiner Veröffentlichungen.<sup>3)</sup> Ich habe später, im Früh-

1) Es handelte sich dabei um die Erdalkalisulfid-, Oxyd- und Selenidphosphore und die Zinksulfidphosphore. Magnesiumsulfidphosphore und die Borsäurephosphore, deren Herstellung erst neuerdings von Herrn Tiede gelehrt wurde, sind erst im Vorliegenden mit einbezogen worden.

2) W. Hausser, Diss. Heidelberg, 25. Februar 1913, S. 9. Es wird die Schwärzung an Quarzquecksilberlampenlicht, aber auch hinter Glas beobachtet und die Entschwärzung und Wiederherstellung der vollen Phosphoreszenzfähigkeit durch starkes Glühen angegeben. Beobachtungen der spektralen Verteilung der Schwärzung gelangen damals nicht.

3) P. Lenard, „Über Lichtsummen“. Heidelb. Akad. 1012, S. 19, Fußnote. Beobachtung des mit der Schwärzung verbundenen Abfalles der Lichtsumme bei langdauernder ultravioletter Belichtung.

Eine Erwähnung von Verfärbung und Verminderung der Phosphoreszenzhelligkeit bei langdauernder Kathodenbestrahlung von „Sidotblende“ (meist ZnCu) findet sich bei Nichols und Merritt, Phys. Rev. 28. S. 355. 1909. Vgl. dazu die betr. Note zu 7.

Die positiven Strahlen verfärben nicht nur Zinkphosphore, sondern auch andere phosphoreszenzfähige Stoffe. Die ersten hierher gehörigen Beobachtungen stammen wohl von W. Wien, der außerdem fand, daß ZnO durch Kanalstrahlen gelblich gefärbt wird (Phys. Zeitschr. 3. S. 440. 1902). I. Tafel zeigte dann (Ann. d. Phys. 11. S. 613. 1903), daß hoher Druck dieselbe gelbliche bis bräunliche Färbung bei geglühtem ZnO hervorbringt, wie die Kanalstrahlen. Kalt bereitetes ZnO wurde weder durch Kanalstrahlen noch durch Druck verändert, phosphoresziert aber auch nicht (trotz dem unzweifelhaft stets genügend vorhandenen Spuren von Cu als wirksamem Metall). Dies zeigt, mit Berücksichtigung der

jahr 1915, den Vorgang näher untersucht, ohne die Ergebnisse zu veröffentlichen, da sich zeigte, daß ein naher Zusammenhang mit dem Phosphoreszenzvorgang nicht besteht. Neuerdings erschien eine Beschreibung einiger vorläufiger, bei Herrn Millikan ausgeführten Versuche über den Gegenstand<sup>1)</sup>, mit Anknüpfung ziemlich weitgehender Folgerungen in bezug auf den Phosphoreszenzvorgang.<sup>2)</sup> Da diese Folgerungen unzu-

Ergebnisse der Phosphoreszenzuntersuchungen, daß die Wirkung der positiven Strahlen der bekannten Druckzerstörung der Phosphoreszenzzentren gleichkommt, welche letztere große komplexe Moleküle sind, die bei hoher Temperatur sich bilden (Lenard und Klatt, Ann. d. Phys. 17. S. 670. 1904; Heidelb. Akad. 1909. 3. S. 24 und Ann. d. Phys. 31. S. 668. 1910). Marsden und Rutherford haben dann die Abnahme der Phosphoreszenzfähigkeit von „Zinksulfid“ (wohl  $\text{ZnCu}$ ) unter dem Einfluß von  $\alpha$ -Strahlen studiert (Proc. Roy. Soc. 83. S. 548, 561. 1910) und schreiben sie auch ganz richtig einer Zerstörung der Phosphoreszenzzentren zu, die unter Aufleuchten (Szintillation) vor sich geht. Daß man hieraus aber nicht — wie Rutherford annimmt — die Größe der Phosphoreszenzzentren selbst, sondern nur die Größe der für die Zerstörung empfindlicher Teile derselben messen kann, habe ich bereits auseinandergesetzt („Ausleuchtung und Tilgung“ IV. S. 28, Heidelb. Akad. 1918). Von E. Rüchardt sind (an  $\text{SrZn}$ -Phosphoren) die Energieverhältnisse bei der Zerstörung der Zentren durch Kanalstrahlen und bei dem damit verbundenem Aufleuchten untersucht worden (Ann. d. Phys. 45. S. 1070 u. 1087. 1914). Man kann aus seinen Resultaten schließen, daß (bei  $\text{SrZn}$   $\alpha$  und  $\text{ZnCu}$   $\alpha$ ) nicht jedes Kanalstrahlteilchen aufleuchtend und zerstörend wirkt, während bei den schnellen  $\alpha$ -Strahlen die Energie jedes Teilchens dazu ausreicht (in Übereinstimmung mit der Rutherford'schen Annahme je einer Szintillation für ein Teilchen). Die mit der Zerstörung durch Kanalstrahlen verbundene Dunkelfärbung der Phosphore ( $\text{SrBi}$   $\alpha$ ,  $\text{ZnCu}$   $\alpha$ ) ist von Bärwald (Ann. d. Phys. 39. S. 866. 1912) und auch von Rüchardt (a. a. O.) beobachtet worden.

1) L. Löb, Proc. Nat. Acad. of Sc. USA., 7. S. 202. 1921.

2) Es wird als wahrscheinlich hingestellt, daß jede Phosphoreszenz- (und Fluoreszenz-) Erregung von Zersetzung der Phosphoreszenzzentren begleitet und daß deshalb die „Theorie von Schmidt und Wiedemann, Lenard und Merritt“ wohl abzuändern sei. Abgesehen von der aus Vorliegendem hervorgehenden Beschränktheit der experimentellen Stützen dieser Behauptung zeugt sie auch von fast völligem Fehlen der nötigen Literaturkenntnis, sowohl Tatsachen als Theorien betreffend. Eine Phosphoreszenztheorie, welche an die vier genannten Namen sich knüpft, gibt es überhaupt nicht; die von mir entwickelte, die bisher überall sich bewährt hat, steht im Gegensatz zu den von den anderen Autoren verfolgten Vorstellungen. (Vgl. „Über Ausleuchtung und Tilgung“ I. S. 21, Note 42 und IV. S. 30, 43 u. f.)

treffend sind, möchte ich, um womöglich Verwirrung vorzubeugen und auch um anderen Beobachtern unnötige Mühe zu sparen, die Ergebnisse meiner inzwischen vervollständigten Untersuchung hier kurz mitteilen.

2. Es zeigt sich, daß die Schwärzung des Zinksulfides durch Licht, ähnlich den sonst bekannten chemischen Lichtwirkungen in Molekülspaltung oder -lockerung besteht; die Schwärzung ist freigemachtem oder aus dem Molekülverband gelockertem Zn zuzuschreiben, ebenso wie man die Lichtschwärzung von AgJ freigemachtem oder gelockertem Ag zuschreibt. Phosphoreszenzfähigkeit ist für die Schwärzungswirkung beim ZnS ebensowenig erforderlich wie beim AgJ; auch reines, nicht phosphoreszenzfähiges ZnS unterliegt ihr. Ist infolge Schwermetallgehaltes (z. B. Cu) Phosphoreszenzfähigkeit vorhanden, so hat die Schwärzung eine ganz andere spektrale Verteilung als die Phosphoreszenzerregung. Die gewöhnlichen ZnS-Moleküle sind es aber nicht, welche der Wirkung unterliegen, sondern es sind das die bei erhöhter Temperatur leicht sich ausbildenden komplexen Moleküle, die auch als Zentrenmoleküle der Phosphoreszenz<sup>1)</sup> bekannt sind und die auch der bekannten Zerstörung durch hohen Druck unterliegen<sup>2)</sup> (auch durch positive Strahlen, vgl. die betr. Note zu 1). Im Gegensatz zu den Silberhaloiden bedarf jedoch das Zinksulfid der Gegenwart von Wasser, um durch das Licht geschwärzt zu werden, und es zeigt sich eine bemerkenswerte Fähigkeit der genannten komplexen ZnS-Moleküle, nach geschehener Lichtschwärzung leicht wieder in ihren ursprünglichen, ungefärbten Zustand zurückzugehen, in einer Weise, die man nach gewöhnlicher chemischer Erfahrung nicht erwarten würde. Alles dies, sowie auch weiteres an Einzelheiten ergibt sich aus den nachfolgend beschriebenen Versuchen.

---

1) Zerstreuungsmolekül nennen wir ein komplexes Molekül, welches durch Einlagerung eines wirksamen Bestandteiles (z. B. eines Cu-, Mn-, Bi-Atoms) phosphoreszenzfähig — zu einem Phosphoreszenzzentrum — wird. (Vgl. „Abklingen“ S. 33 uff., Heidelb. 1912 und über die Größen der Zentrenmoleküle „Ausleuchtung und Tilgung“. IV, S. 24, Heidelb. 1918.)

2) Lenard u. Klatt, Ann. d. Physik 12. S. 439. 1903 und Lenard, Elster- und Geitel-Festschrift, S. 669. 1915.

3. *Chemische Einflüsse.* — Die meisten Beobachtungen zur Untersuchung des Schwärzungsvorganges habe ich an  $\text{ZnCu } \alpha$ -Phosphoren ausgeführt und zwar bei spektraler Belichtung mittels eines sehr lichtstarken Quarzprismenapparats mit Quarzquecksilberlampe.<sup>1)</sup> Die Bildebene des Spektrums war dabei horizontal gelegt, so daß zunächst in einfacher Weise auf Papier-, Glas- oder Glimmerunterlage gesiebtes Phosphorpulver benutzt werden konnte. Man bemerkt bald, daß das Eintreten der Schwärzung launisch ist<sup>2)</sup>; manchmal bleibt sie ganz aus. Genügende Variation der Versuchsbedingungen zeigte, daß das Ausbleiben der Wirkung mit Mangel an Feuchtigkeit zusammenhängt, daß aber auch das Ozon mitwirkt, das dicht an der Phosphorfläche unvermeidlich in der Zimmerluft durch eben das ultraviolette Licht erzeugt wird. Gegenwart von Wasser, wenn es auch nur in Dampfgestalt zugeführt wird, scheint durchaus erforderlich zu sein für die Schwärzung, und ozonzersetzende Stoffe, deren eine sehr geringe Menge genügt, befördern sie. Bleibt die Schwärzung bei einem belichteten Phosphor aus, so tritt sie gleich auf, wenn man wasserdampfgesättigte Luft gegen ihn bläst, noch besser, wenn die Luft Ammoniak oder Formaldehyd enthält. Man erhält z. B. die Schwärzung im Spektrum des erwähnten Apparates in Bruchteilen einer Minute, wenn man an einem mit Formaldehyd befeuchteten Glasstab vorbei nach dem Phosphor bläst, der vorher ungeschwärzt blieb.<sup>3)</sup> Zu bemerken ist, daß ohne Licht

1) S. über diesen Apparat Ann. d. Phys. 31. S. 643. 1910 und Elster- und Geitel-Festschrift S. 670, Note.

2) Dies war schon von Herrn Hausser gefunden worden (bei seinen oben zitierten Untersuchungen) und hinderte damals sein weiteres Vordringen in der Richtung der Schwärzungsfrage.

3) Ein Beispiel sehr verwunderlichen Verhaltens, das erst durch Versuche wie die obigen erklärbar wurde und anfangs den Gegenstand höchst rätselhaft erscheinen ließ, ist folgendes: Belichtet man eine auf trockener reiner Glasunterlage befindliche Phosphorschicht, die teilweise von einem Steg aus schwarzem Papier beschattet ist, in geringem Abstand unter einer Quecksilberlampe, so kann es kommen, daß trotz der sehr hohen Lichtintensität und auch nach sehr vielen Minuten nicht nur unter dem schattengebenden Papier, sondern auch an den unbedeckten Stellen die Schwärzung ausbleibt, ausgenommen nur an einem schmalen Streifen seitwärts vom Papiersteg, der geschwärzt gefunden wird und wie ein von seitlich befindlicher Lichtquelle geworfener Schatten des Stegs aus-

weder  $\text{NH}_3$  noch Formaldehyd den Phosphor schwärzt. Unter einer zwei bis drei Millimeter tiefen Wasserschicht befindlicher Phosphor wird viel stärker geschwärzt als nur breiig befeuchteter oder auf dem Wasser — mangels voller Benetzung — schwimmender Phosphor; die Wasserschicht absorbiert zwar einen Teil des wirksamen Lichtes, aber sie hält das Ozon ab. Daß in der Tat  $\text{O}_3$  die Schwärzung hindert, zeigt sich, wenn man Luft aus einer gewöhnlichen, mit einem Induktionsapparat betriebenen Ozonröhre gegen bereits lichtgeschwärzten Phosphor strömen läßt; er wird entschwärzt, wozu allerdings ebenfalls die Gegenwart von Feuchtigkeit notwendig zu sein scheint. Auch feuchtigkeitgesättigte, nicht ozonhaltige Luft, wirkt entschwärend, jedoch langsam — in ein oder zwei Tagen —, etwas schneller bei Gegenwart von  $\text{H}_2\text{S}$ . Sehr schnell — in Sekunden — entschwärzt Wasserstoffsuperoxyd, ebenso Chlor. Sieht man die Schwärzung als Zinkausscheidung an, so könnten alle diese Entschwärzungen leicht als Folge von Entstehung farbloser Verbindungen,  $\text{ZnO}$ ,  $\text{ZnS}$ ,  $\text{ZnCl}_2$  erscheinen; doch ist die Sache nicht so einfach, worauf wir noch zurückkommen. Hervorgehoben sei zunächst noch, daß Fernhalten von  $\text{O}_3$  oder anderen oxydierenden Stoffen nicht genügt, um die Schwärzung zu sichern, sondern daß Gegenwart von Wasser die Hauptrolle spielt. Belichtet man die Phosphorschicht in einem Quarzrohr durch das trockene Wasserstoffgas oder  $\text{CO}_2$  geleitet wird, so erhält man keine Schwärzung; sind aber dieselben Gase durch eine Waschflasche mit — am besten erwärmtem — Wasser geleitet, so tritt die Schwärzung stark auf.

Das pulverig-kristallinische  $\text{ZnS}$  hält an seiner Oberfläche allerlei Gase und Dämpfe, mit denen es in Berührung war, ziemlich lang fest; es genügte z. B., den Phosphor einige Zeit  $\text{O}_3$  haltiger oder  $\text{CS}_2$ -haltiger Luft ausgesetzt zu haben, um eine Schwärzung durch Licht zu erschweren, wogegen derselbe Phosphor formaldehydhaltiger feuchter Luft ausgesetzt auch

sieht. Die Erklärung ist diese, daß die relative Trockenheit und der starke Ozongehalt der Luft im Lampengehäuse die Schwärzung verhindern, daß aber durch die Hitze der Lampe Wasserdampf und wohl auch ozonzerstörende Dämpfe dem Papier entsteigen, die durch vorhandene einseitige Luftströmung gegen jene Stellen getrieben werden, die deshalb nachher geschwärzt sich finden.

mit Nachwirkung leicht und ohne weiteres schwärzbar wird. Dieses Festhaften von allerlei fremden Stoffen an der Phosphoroberfläche darf zur Erklärung des Launischen im Auftreten der Schwärzungswirkung herangezogen werden in Fällen, wo die gasförmige Umgebung des Phosphors sonst zweifelsfrei gewählt erscheint. Auch versteht man die oft großen Unterschiede in der Schnelligkeit der Schwärzung bei anscheinend gleich beschaffenen Phosphorproben verschiedener Herkunft oder Aufbewahrungsart, sowie auch daß solche Unterschiede gerade bei feinpulverigen Proben besonders auffallend bemerkbar waren. Sehr wohl stimmt außerdem mit dem entscheidenden Einfluß der Umgebung und absorbierter Schichten die Tatsache überein, daß die Schwärzung stets nur eine sehr dünne Oberflächenschicht des Phosphors ergreift, worauf wir noch zurückkommen.

4. Um den Schwärzungsvorgang unabhängig von Zufälligkeiten der Umgebung und unter ihm günstigen Umständen

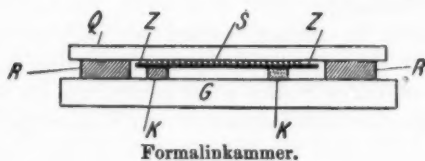


Fig. 1.

studieren zu können, wurde der zu beobachtende Stoff in eine luftdichte Kammer unter Quarzverschluß gesetzt und zwar so, daß möglichst wenig Luft mit eingeschlossen wurde (vgl. die Fig. 1). G. ist eine Glasplatte, auf welcher die den Stoff in dünn aufgesiebter Schicht S tragende Zinkplatte Z mittelst drei federnder Kautschukfüßchen K sitzt, welche Z und S gegen die Quarzplatte Q pressen. Der Kautschukring RR besorgt die Abdichtung gegen außen, wenn das Ganze mittels einer (in der Abbildung nicht dargestellten) Verschraubung in vertikaler Richtung zusammengepreßt wird. In den durch die Kautschukfüßchen K freigehaltenen Raum unter Z konnten einige Tropfen einer Flüssigkeit gebracht werden, deren Dämpfen man den zu untersuchenden Stoff aussetzen wollte. Gewöhnlich, wenn nichts anderes bemerkt, war es Formaldehydlösung (For-

malin), welche sowohl genügend Wasserdampf abgibt, als auch Ozon verzehrt.

Die Schwärzung am vollen Licht der Quarzquecksilberlampe geht in dieser Kammer bei  $\text{ZnCu } \alpha$ -Phosphor mit großer Geschwindigkeit vor sich; z. B. ist in 10 cm Abstand vom Leuchtrohr der Lampe in wenigen Sekunden intensive Schwärzung erreicht. Die Schwärzung tritt noch schneller ein, wenn der Phosphor schon vorher längere Zeit in der Formalinkammer war.

5. *Spektrale Verteilung.* — Wird der  $\text{ZnCu } \alpha$ -Phosphor in der Formalinkammer dem Spektrum des großen Quarzapparates ausgesetzt, so bilden sich alle Quecksilberlinien von  $334 \mu\mu$  an bis an die Grenze des vorhandenen Quarz-Ultraviolett ( $200 \mu\mu$ ) schnell schwarz ab. Zuerst, innerhalb  $\frac{1}{2}$  oder 1 Minute erscheint die starke Linie  $313 \mu\mu$ , dann folgen die kürzerwelligen Linien, zuletzt, nach 5 oder 10 Minuten<sup>1)</sup>, die schwächere Linie  $334 \mu\mu$ , während alles längerwellige Ultraviolett, namentlich auch die starke Linie  $366 \mu\mu$ , sowie das sichtbare Spektrum unabgebildet bleiben. Es geht daraus hervor, daß die im Quarz-Ultraviolett sehr starke Wirkung gegen das Glasultraviolett zu, etwa bei  $334 \mu\mu$ , einen steilen Abfall erleidet und im längerwelligen Glasultraviolett, sowie im sichtbaren Gebiet vollständig fehlt. Damit in Übereinstimmung ist die Beobachtung, daß hinter dickem Glas selbst das volle Licht der Quecksilberlampe nur schwach wirkt; so wurde hinter 2,2 mm dickem Glas in 10 cm Abstand von dem Leuchtrohr der Lampe erst nach 15 Minuten deutliche Schwärzung erhalten, hinter 0,6 mm Glas schon nach 2 Minuten (ohne Glas schon nach wenigen Sekunden). Daß Sonnen- oder Tageslicht selbst hinter (nicht zu dickem) Glas nach langer Zeit merklich die Zinkphosphore verdirbt, was bereits Herr Hausser beobachtet hat<sup>2)</sup>, ist hiernach ebenfalls verständlich, denn die Sonnenstrahlung reicht nach Durchsetzung der Erdatmosphäre noch immer spurenweise bis  $310 \mu\mu$ , und gewöhnliches Glas

1) Die Zeitangaben beziehen sich auf einen frisch in die Formalinkammer gebrachten feinkörnigen  $\text{ZnCu } \alpha$ -Phosphor. War der Phosphor schon mehrere Tage in der Kammer gewesen, so beginnt die Abbildung des Spektrums schon innerhalb einer Sekunde sichtbar zu werden.

2) W. Hausser, a. a. O. S. 9.



ist in genügend dünner Schicht ebenfalls bis dahin einigermaßen durchlässig.

Vergleicht man diese spektrale Verteilung der Schwärzungswirkung mit der spektralen Verteilung der Phosphoreszenzerregung des  $\text{ZnCu}\alpha$ -Phosphors, so findet man entschiedene Nichtübereinstimmung. Die Phosphoreszenzerregung hat ihr erstes Maximum bei etwa  $430\mu$ , ihr zweites bei  $360\mu$ <sup>1)</sup>; diese beiden Wellenlängen erregen intensivstes Leuchten des Phosphors, aber sie bringen keine Schwärzung hervor. Ebenso liegt die Stelle fast plötzlichen Beginns der Schwärzungswirkung ( $434\mu$ ) gerade bei einem Minimum der Phosphoreszenzerregung (etwa mitten zwischen dem zweiten und dritten Phosphoreszenzmaximum). Wären also die Herren Löb und Millikan nur bis zum Studium der spektralen Verteilung vorgeedrungen, so hätten sie das Unhaltbare ihrer Annahme des Zusammenhangs der chemischen Wirkung mit der Phosphoreszenzerregung wohl sogleich einsehen müssen. Dagegen ist der Zusammenhang der Phosphoreszenzerregung mit der lichtelektrischen Wirkung — der Kernpunkt der von mir eingeführten Theorie der Phosphoreszenz, welche die genannten Herren bezweifeln wollen — stets, auch beim Studium der spektralen Verteilung aufs klarste zutage getreten.<sup>2)</sup> Der Nichtzusammenhang der chemischen Wirkung mit der Phosphoreszenzerregung<sup>3)</sup> zeigt sich auch noch in ganz anderer Weise aufs unzweideutigste. Die Schwärzung durch das Licht

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 659. 1910; R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 65. S. 209. 1921.

2) Siehe Lenard und Saeland, Ann. d. Phys. 28. S. 476. 1909, außerdem die sehr verfeinerte neue Untersuchung von K. Göggel, Ann. d. Phys. 67. S. 301. 1922 und auch schon Elster- und Geitel-Festschr. S. 687. 1915.

3) Daß man einen Zusammenhang von Phosphoreszenz- (auch Fluoreszenz-) Erregung und chemischer Wirkung noch immer festzuhalten sucht, hängt wohl mit der noch immer anzutreffenden irrtümlichen Annahme eines Verbundenseins von chemischer Wirkung und Elektronenbefreiung zusammen, welche letztere allerdings Grundvorgang der Phosphoreszenz ist. Chemische Wirkung hängt aber durchaus nicht immer mit Elektronenbefreiung zusammen (was anscheinend nach Beobachtungen von Herrn Haber angenommen wird), sogar wohl überhaupt nur in gewissen Sonderfällen (siehe Lenard und Ramsauer, „Wirkungen ultraviolettten Lichtes“ V. S. 8 uf, Heidelb. 1911).



tritt nämlich nicht nur bei  $\text{ZnCu}\alpha$ -Phosphoren, sondern ganz ebenso gut auch bei reinem, von Cu und anderen wirksamen Metallen möglichst freiem und daher nicht oder nur spurenweise phosphoreszenzfähigem Zinksulfid auf<sup>1)</sup>, falls dasselbe nur vorgeglüht ist, und ebenso, wieder ganz ohne Rücksicht auf das wirksame Metall, bei allen guten  $\text{ZnS}$ -Phosphoren, von denen die hervorragendsten versucht wurden<sup>2)</sup>, nämlich:  $\text{ZnCu}\alpha$ ,  $\text{ZnCu}\beta$ ,  $\text{ZnCu}\gamma$ ,  $\text{ZnMn}\alpha$ ,  $\text{ZnAg}\beta$ ,  $\text{ZnBi}\alpha$ . Dabei ist die spektrale Verteilung der Schwärzung in allen diesen Fällen dieselbe, wie oben  $\text{ZnCu}\alpha$  beschrieben, während die Erregungsverteilungen der verschiedenen genannten Phosphore sehr verschieden gelegen sind. Damit ist erwiesen, daß die — an die spektrale Verteilung geknüpften — Lichtenergieverbräuche für die Schwärzungswirkung einerseits und für die Phosphoreszenzerregung andererseits<sup>3)</sup> nichts miteinander zu tun haben, und zwei Vorgänge, die gesonderte Energiezufuhren haben, können nicht wie Ursache und Wirkung zusammenhängen.

Ebenso wie einerseits nicht phosphoreszenzfähiges Schwefelzink gute Schwärzung zeigte, fehlte umgekehrt andererseits Schwärzung bei manchen  $\text{ZnS}$ -Phosphoren, oder sie trat nur sehr schwach auf. So bei einem  $\text{ZnBi}\gamma$ -Phosphor und bei  $\text{ZnNi}$ -Präparaten. Es waren dies aber ausschließlich nur stark gefärbte Körper — der erstgenannte graubraun und deshalb auch schlecht leuchtend, die Ni-Präparate tiefgelb —, und es ist anzunehmen, daß hier das wirksame Licht im Füllmaterial stark absorbiert wird, ehe es an diejenigen Moleküle gelangt, welche der Schwärzung unterliegen<sup>4)</sup>, womit die von Dr. To-

1) Es wurde von Herrn Dr. Tomaschek analytisch und nach Herrn Scheifeles Verfahren elektrolytisch gereinigtes  $\text{ZnS}$  benutzt, das auch nach Glühen nur spurenweise phosphoreszenzfähig war. (Vgl. R. Tomaschek, a. a. O.)

2) Meist hergestellt von deren erstem gründlichen Erforscher R. Tomaschek. Auch ausgezeichnete käufliche  $\text{ZnCu}\alpha$ - und  $\text{ZnCu}\gamma$ -Phosphore habe ich benutzt, deren Überlassung ich der Braunschweiger Chininfabrik und neuerdings besonders Herrn Dr. Jahoda in Wien und der Firma Merz & Benteli in Bern verdanke.

3) S. den Nachweis des Zusammenhangs von Erregungsverteilung und Lichtabsorption in „Lichtabsorption und Energieverhältnisse bei der Phosphoreszenz“. Heidelb. Akad. 1914.

4) Daß auch die  $\text{ZnNi}$ -Präparate, welche nicht phosphoreszenzfähig sind (s. Tomaschek, a. a. O.), dennoch Zentrenmoleküle enthalten, zeigt

maschek studierten Absorptionsspektren der Ni-Präparate übereinstimmen (starke Absorption schon von 500, noch mehr von  $480\mu\mu$  an über alles Violett und weiter).

Entschwärende Wirkung war bei keinen Wellenlängen des Intraquarviolett und des sichtbaren Spektrums zu bemerken.

6. Daß nicht die gewöhnlichen  $ZnS$ -Moleküle es sind, denen die Schwärzung zukommt, zeigte sich schon dadurch, daß, wie bereits angegeben, eine Vorerhitzung notwendig war, um Schwärzung im Licht zu erhalten. Auf nassem Wege, durch Fällung mittels  $H_2S$  hergestelltes und ohne Erhitzung getrocknetes  $ZnS$  zeigte die Wirkung nicht oder nur als schwache Bräunung nach lange fortgesetzter intensiver Belichtung in Gegenwart von Reduktionsmitteln, wie Formaldehyd oder besser  $SO_2$ . Glühen des Sulfids, wie es auch zur Phosphorbereitung notwendig ist<sup>1)</sup>, genügt — ohne jede Hinzufügung von Metall und auch ohne jeden Schmelzzusatz —, um dasselbe sehr lichtempfindlich zu machen. Auch alle die erwähnten empfindlichen  $ZnS$ -Phosphore sind bekanntlich in der Glühhitze hergestellt und lassen sich auf nassem Wege nicht gewinnen. Man darf annehmen, daß der Schwärzung dieselben polymerisierten Sulfidmoleküle unterliegen, die als Zentrenmoleküle bei den Erdalkaliphosphoren bereits ausführlich studiert sind<sup>2)</sup> und die bei genügend hoher Temperatur sich bilden.<sup>3)</sup> Ob diese Moleküle auch ein wirksames Metallatom (Cu, Mn, Bi usw.) enthalten (also vollständige Phosphoreszenzzentren sind), oder ob nicht, ist nach den vorgetragenen Erfahrungen gleichgültig.

ihre Druckfarbe (Tomaschek, a. a. O. S. 196), und dies schließt die sonst nabeliegende Annahme aus, daß die Schwärzung hier deshalb ausbleibe, weil Ni die Zentrenmolekülbildung verhindere.

1) S. hierüber und auch über die Vorsichtsmaßregeln, welche zur Verhinderung von Oxydation beim Glühen erforderlich sind, R. Tomaschek (a. a. O.).

2) S. die Zusammenfassung in „Ausleuchtung und Tilgung“, 1918.

3) Daß unter Umständen lange Zeiten hohe Temperaturen ersetzen können, ist an dem Beispiel des auf einem schwefelwasserstoffhaltiger Luft ausgesetzten Zinkdache gebildeten Phosphors gezeigt, dessen Kenntnis wir Herrn Direktor Dr. Bosch verdanken (vgl. R. Tomaschek, a. a. O., S. 19, Fußnote). Auch für die Verfärbung im Licht war nicht durchaus Glühen des  $ZnS$  erforderlich, sondern es zeigte sich auch schon nach Trocknung bei etwa  $250^\circ$  deutliche Braunfärbung mit derselben spektralen Verteilung wie oben angegeben.

In Übereinstimmung mit dieser Auffassung ist es, daß genügend hoher Druck die Fähigkeit des Sulfides, im Licht geschwärzt zu werden, vernichtet. Der Versuch wurde mit  $\text{ZnCu}$   $\alpha$  ausgeführt, das im Achatmörser andauernd kräftig verrieben war — wobei die bereits bekannte fleischfarbene oder schwachbräunliche Verfärbung eintritt<sup>1)</sup> — und das nachher in der Formalinkammer andauernd belichtet keine Schwärzung zeigte. Es sind bekanntlich eben die komplexen Zentrenmoleküle bzw. die Phosphoreszenzzentren, welche durch den Druck zerstört werden.<sup>2)</sup>

7. *Zinkoxyd* zeigte weder geglüht noch ungeglüht irgendwelche Schwärzung im Licht der Quecksilberlampe. Dabei zeigte das benutzte Oxyd in geglühtem Zustande starkes grünes Leuchten (wohl unzweifelhaft infolge geringen Cu-Gehaltes); auch ergab es die bekannte bräunliche Druckfarbe.<sup>3)</sup>

Daß *Erdalkaliphosphore* ebenfalls keine bleibende Veränderung bei Belichtung erfahren, ist schon lange bekannt; wäre irgendeine dauernde Lichtwirkung vorhanden, so hätte sie bei den sehr zahlreichen veröffentlichten quantitativen Versuchen mit diesen Phosphoren von selbst sich zeigen müssen, auch wenn sie nicht besonders gesucht worden wäre.  $\text{CaBi}$   $\alpha$  in der Formalinkammer in 10 cm Abstand von der Quarz-

---

1) Elster- u. Geitel-Festschr., S. 676, Note 22. Bei R. Tomaschek (a. a. O. S. 195) wird die Druckfarbe „schokoladenbraun“ genannt, was sie aber zu dunkel darstellt. Die Druckfarbe ist vielmehr bei  $\text{ZnS}$  so hell, daß es schwer ist, den bei den Erdalkalisulfiden studierten Einfluß des Lichtes auf ihre Entstehung zu verfolgen. Wir schreiben die Druckfarbe ebenfalls freigewordenen oder gelockerten Metallatomen zu (Elster- u. Geitel-Festschr. S. 684), wie die hier untersuchte Lichtschwärzung; daß erstere Farbe so viel zarter, heller ist, als die nur bei schwachem Auftreten als Bräunung erscheinende Lichtschwärzung, erklären wir daraus, daß im ersteren Falle die die Färbung bewirkenden Zn-Atome im ganzen farblos-pulverigen Material verteilt sind, während sie im letzten Falle alle nur an der Oberfläche sich befinden.

2) Lenard und Klatt, Ann. d. Phys. 12. S. 39. 1903 und Elster- u. Geitel Festschrift.

Bemerkenswert ist, daß bekanntlich die Lichtwirkung auf die Silberhaloide ebenfalls vorzugsweise auf komplexe Moleküle derselben ausgeübt wird (sog. Reifung der Trockenplattenemulsionen).

3) I. Tafel, a. a. O.

quecksilberlampe in sehr dünner, also gut zu durchstrahlender Schicht belichtet, zeigte keine Veränderungen weder im Aussehen noch in seiner Phosphoreszenzfähigkeit. Ohne Formaldehyd, im Quarzrohr, wurde in nur 5 cm Abstand von einer sehr intensiven Quarzamalgalampe 4 Stunden lange Belichtung versucht und ebenfalls kein Unterschied zwischen belichtetem und beschattet gewesenem Teil des Phosphors gefunden. Auch im sehr kurzwelligen Licht der ultravioletten Funkenlichtquelle<sup>1)</sup> war keine bleibende Veränderung bei den Erdalkaliphosphoren zu finden. Der Versuch wurde mit  $\text{CaBi } \alpha$ ,  $\text{SrBi } \alpha$ ,  $\text{BaCu } \alpha$ ,  $\text{ZnMn } \alpha$  ausgeführt, die ungefähr 10 Stunden lang (bei Gelegenheit anderer Arbeiten) in großer Nähe unbedeckt dem Funkenlicht ausgesetzt waren.<sup>2)</sup>

*Magnesiumsulfid* scheint den Erdalkalisulfiden analog sich zu verhalten nach dem Ausfall von Versuchen an einem vortrefflich leuchtenden  $\text{MgSSb}$ -Phosphor<sup>3)</sup>, der weder im bloßen Quarzgefäß noch in der Formalinkammer irgendwelche merkliche Veränderung im Spektrum der Quarzquecksilberlampe zeigte.

Dagegen zeigten Dr. Tiedes *Borsäurevphosphore*, deren wirksame Bestandteile fluoreszenzfähige Kohlenstoffverbindungen sind, dauernde Veränderungen im Lichte. Dies ist von Herrn Dr. Tomaschek bei näherer Untersuchung dieser Phosphore festgestellt worden.<sup>4)</sup> Ich habe mich auf Versuche mit einem

1) Bis etwa  $100 \mu\mu$ ; Lenard u. Ramsauer, Heidelb. Akad. 1910.

2) *Kathodenstrahlen* (von rund  $1/3$  Lichtgeschwindigkeit) in Entladungsröhren verfärben bei langdauernder Einwirkung Bariumphosphore unter Verminderung ihrer Phosphoreszenzfähigkeit. Der Versuch wurde besonders mit  $\text{BaCuLi}_2\text{PO}_4$  ausgeführt, dessen hellgelbliche Eigenfarbe in braungrau sich verwandelte. Besondere Gasentwicklung trat dabei nicht auf. Die Schwärzung der  $\text{ZnCu}$ -Phosphore durch Kathodenstrahlen ist bereits allgemein bekannt geworden (s. die betr. Note zu 1); Herr Rupp hat sie im hiesigen Institut auch bei Versuchen am Aluminiumfensterrohr, also bei Ausschaltung aller Nebeneinflüsse der Gasentladung beobachtet.

3) Ich verdanke das Präparat Herrn Dr. Tiede, dem ersten Hersteller der Magnesiumsulfidphosphore (s. Ber. d. D. chem. Ges. 55. S. 69. 1922).

4) Wir verdanken auch hierzu das Material Herrn Dr. Tiede. Seine erste Mitteilung über diese ebenfalls von ihm entdeckte neue Gruppe von Phosphoren findet sich in dem Ber. d. D. chem. Ges. 55. S. 588. 1922.

Phenanthrenphosphor beschränkt.<sup>1)</sup> Eine dünne, ebene Schicht desselben zeigt, genügend lange dem intensiven Spektrum der Quarzquecksilberlampe ausgesetzt, gelblichgrüne Verfärbung bei 240 bis 313  $\mu\mu$  und bei 215  $\mu\mu$ . Es sind dies zwei Spektralbezirke, an welchen der Phosphor auch gut zu seinem grünen Dauerleuchten erregt wird; wir bezeichnen sie mit  $d_2$  und  $d_3$ . Die langwelligste Erregungsstelle dieses Leuchtens,  $d_1$ , bei etwa 340  $\mu\mu$ , zeigte dagegen keine dauernde Veränderung.<sup>2)</sup> Noch leichter als durch die gelbgrüne Verfärbung erkennt man die geänderten Spektralstellen durch nachträgliche Belichtung der Phosphorschicht mit der Eisenlampe. Die soeben genannten Stellen zeigen dann vermindertes Nachleuchten. Wie das Zusammenfallen der Verfärbungsstellen mit den Erregungsstellen  $d_2$  und  $d_3$  zeigt, steht bei diesem Phosphor die dauernde chemische Veränderung in engerer Beziehung zur Phosphoreszenzfähigkeit als bei den Zinksulfidphosphoren, womit auch übereinstimmt, daß die Veränderung nicht dem Grundmaterial, bzw. den Zentrenmolekülen angehört, wie bei ZnS, sondern offenbar dem hier das wirksame Metallatom ersetzende Phenanthrenmolekül. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß solche Moleküle bei dem mit der  $d$ -Erregung verbundenen Austritt eines Elektrons den Zusammenhalt verlieren, ebenso daß dieses nur dann erfolgt, wenn der Austritt des Elektrons mit überschüssiger Energie erfolgt, wie bei den kürzerwelligen Lichtquanten ( $d_2$  und  $d_3$ ), nicht bei den längerwelligen ( $d_1$ ). Verfärbung und Zerstörung der Phosphoreszenzfähigkeit wären dann beide als Wirkung des verlorenen Zusammenhalts des Moleküls aufzufassen. Erhitzt man den veränderten Phosphor gelinde, so verschwindet die Verfärbung schnell und die Phosphoreszenzfähigkeit kehrt wieder. Offenbar haben die Zer-

1) Eingehende Veröffentlichung über die Borsäurephosphore erfolgt von Herrn Dr. Tomaschek.

2) Der Phosphor zeigt außerdem fleischfarbenes  $m$ -Leuchten bei gewöhnlicher Temperatur von 320 bis 420  $\mu\mu$ , welche Spektralgegend aber ebenfalls keine bleibende Änderung erleidet. Die Stellen  $d_2$  und  $d_3$  sind nach Dr. Tomascheks Beobachtungen zugleich Stellen starker Lichtabsorption im Phosphor, während  $d_1$  schwächer absorbiert wird. Alle diese Absorptionen, sowie die Erregungsverteilung besitzen übrigens sehr bemerkenswerte Feinstrukturen, worüber ebenfalls Dr. Tomascheks Veröffentlichung berichten wird.

fallsteile des wirksamen Moleküls und das verlorene Elektron dann wieder sich vereinigt. Solche Zerstörungen können natürlich nicht stattfinden, wenn statt des Moleküls ein einzelnes Atom das Lichtabsorbierende ist, wie bei den ZnS-Phosphoren oder den Erdalkali- oder Magnesiumphosphoren. Wohl aber kann ähnliches bei den fluoreszierenden Lösungen leicht zersetzlicher Farbstoffe vorkommen<sup>1)</sup>; die chemische Änderung ist dann aber nur als eine die Phosphoreszenz bzw. die Fluoreszenz begleitende Nebenerscheinung aufzufassen, die (z. B. bei längerwelliger Erregung) auch fehlen kann, nicht als ein die Phosphoreszenz oder Fluoreszenz bedingender Vorgang.<sup>2)</sup>

8. *Entschwärzung.* — In Übereinstimmung mit dem aus dem Vorhergehenden zu ziehenden Schluß, daß die Schwärzung eine Lichtzerersetzung des Zinksulfids ist, steht das unter 3 bereits studierte chemische Verhalten des geschwärzten Stoffes, welches in jeder beobachteten Beziehung gleich dem von fein verteiltem Zink ist. Oxydationsmittel heben die Schwärzung auf, wie wir gefunden haben — Sauerstoff der Luft, besser Ozon, noch besser Wasserstoffsuperoxyd oder Chlor —; Reduktionsmittel befördern die Schwärzung — Formaldehyd, schweflige Säure. Auch die chemische Doppelstellung des Formaldehyds, sowohl reduzierend als auch oxydierend wirken zu können, scheint sich hier zu bewähren: bereits längere Zeit in der Formalinkammer eingeschlossen gewesenes Zinksulfid wurde nicht nur sehr schnell — in wenig Sekunden — am Licht geschwärzt, sondern es verschwand auch in Pausen der Belichtung die Schwärzung auffallend schnell wieder — etwa nach  $\frac{1}{4}$  Stunde; Schwärzung und Entschwärzung waren so am selben Präparat in beliebiger Wiederholung erhältlich. Daß die Schwärzung auch durch Erhitzung beseitigt werden kann, stimmt mit der Vorstellung überein, daß dabei eine Wiedervereinigung des ausgeschiedenen Zn mit dem zurückgebliebenen S stattfindet.

1) Man findet Angaben hierüber in der Literatur (Perrin, dessen Veröffentlichungen aber nicht erhältlich waren) und es ist auch eine altbekannte Tatsache, daß fluoreszierende Lösungen meist sehr lichtzersetzlich sind.

2) Da der Zusammenhalt der Atome im Molekül durch Elektronen erfolgt (Valenzelektronen), so ist es überhaupt und von vornherein klar, daß Elektronenaustritt aus Molekülen deren Zerfall bedingen kann, wenn auch im einzelnen darüber noch nicht viel bekannt ist (vgl. „Quantitatives über Kathodenstrahlen“. S. 186, Note 378. Ver. wiss. Verleger, Berlin. 1918).

Sehr bemerkenswert ist, daß die durch alle die genannten Einflüsse erzielte Entschwärzung zugleich vollkommene Wiederherstellung der Phosphoreszenzfähigkeit mit sich bringt, wenn wirksames Metall zugegen war, z. B. bei  $\text{ZnCu } \alpha$ . Es ist dies nicht überraschend wenn die Entschwärzung durch Erhitzung stattfand, wohl aber sehr, wenn beispielsweise Chlorgas gewirkt hatte. Man dürfte in letzterem Falle die Bildung von  $\text{ZnCl}_2$  erwarten, was aber nicht eine Rückbildung, sondern eine fortgesetzte Zerstörung der Phosphoreszenzzentren bedeutete. Der Versuch zeigt jedoch, daß so gut wie vollständige Rückbildung der Zentren anzunehmen ist. Hat man eine sehr dünn aufgesiebte Schicht von  $\text{ZnCu } \alpha$  durch intensive Belichtung so gut wie möglich durchgeschwärzt, was die Phosphoreszenzfähigkeit sehr vermindert, während sie an benachbarten, bei der Belichtung durch einen Schirm geschützten Stellen voll erhalten ist, und setzt man dann die Schicht einem der genannten Oxydationsmittel aus, so findet man nachher die ganze, wieder gleichmäßig hell gewordene Schicht auch vollkommen gleichmäßig phosphoreszenzfähig, so daß weder im Leuchten während einer erregenden Belichtung noch im Nachleuchten der geringste Unterschied zwischen den beschirmt und den geschwärzt gewesenen Teilen zu bemerken ist. Auch nach viermaliger Wiederholung von Schwärzung und Entschwärzung ist keine bleibende Änderung der Phosphoreszenzfähigkeit bemerklich. Auch mit dem Mikroskop betrachtet, erscheinen die kleinen Kriställchen, aus welchen das Phosphorpulver besteht, nach der Entschwärzung vollkommen unverändert in Gestalt, schwach gelblicher Farbe und Oberflächenbeschaffenheit, kurz in jeder merklichen Beziehung. Offenbar wirken also die Oxydationsmittel ebenso wie Erwärmung dahin, die durch das Licht zersetzten — oder vielleicht nur gelockerten — Zentrenmoleküle wieder so weit in ihren ursprünglichen Zustand zurückzuführen, daß keine Umgruppierung der Atome übrig bleibt. Damit stimmt überein, daß stets nur äußerst geringe Mengen von Oxydationsmitteln zur Wiederherstellung der Phosphoreszenzfähigkeit notwendig sind, wenn Zeit gelassen ist, als wirkten dieselben nur katalytisch.

9. Allerdings könnte man meinen, daß die Schwärzung nur eine so dünne Oberflächenschicht betreffe, daß Bildung von  $\text{ZnO}$  oder  $\text{ZnCl}_2$  bei deren Farblosmachung leicht unmerklich



bleiben könnte. In bezug auf Dünne der geschwärzten Schicht gibt dem die *mikroskopische Beobachtung* auch ganz recht. Betrachtet man das lichtgeschwärzte Pulver bei 50- bis 500facher Vergrößerung, so sieht man die Kriställchen in ihrer ursprünglichen, gelblichen Farbe und nur sehr dünn von einem schwarzen Netz- oder Punktwerk überzogen. Man kann auf diese schwarze Schicht auch bei 500facher Vergrößerung in so scharfen Umrissen einstellen, als es bei der Unebenheit der Oberfläche, auf welcher die Schicht sich befindet, nur irgend zu erwarten ist, und hieraus geht die außerordentliche Dünne der Schicht unzweifelhaft hervor. Benutzt man aber im dunklen Zimmer tief violettes Licht zur Belichtung des Präparates, so daß die gelbgrüne Phosphoreszenz der ungeschwärzten Teile genügend hell zur mikroskopischen Beobachtung erregt wird, und versucht man nun auf einen Kristallumriß einzustellen, so gelingt das nicht; offenbar leuchtet das ganze Innere der Kriställchen, und sie sind viel zu dick für scharfe Einstellung bei 500facher Vergrößerung im Gegensatz zur scharf einstellbaren geschwärzten Schicht. Ebenso ist demnach das Volum der geschwärzten Teile im Vergleich zum Gesamtvolum als sehr klein anzunehmen, und der Eindruck der Schwärzung aufs Auge, sowohl was Eigenfarbe als was Phosphoreszenzfähigkeit anlangt, ist nur wegen der metallischen Undurchsichtigkeit des Stoffes der dünnen Schicht so stark. Die Dünne der schwärzbaren Schicht ist auch verständlich aus zwei Gründen. Erstens fanden wir Wasser zur Schwärzung nötig, und dieses kann nur an der Oberfläche des festen, unlöslichen, kein Wasser aufnehmenden Stoffes vorhanden sein, und zweitens muß bei der Belichtung eine einmal gebildete, stark lichtabsorbierende Schicht das weitere Eindringen des wirksamen Lichtes in die Tiefe verhindern.

10. *Lichtelektrische Messung.* — Um die Annahme der Rückbildung der Phosphoreszenzzentren zu prüfen, habe ich Messungen des Phosphoreszenzlichtes wiederentschwärzter Schichten vorgenommen, die äußerst dünn, schleierartig auf Tragglas gesiebt waren um möglichst stark bei der Schwärzung ergriffen zu werden. Die zu messende Schicht konnte in fest vorgesehener Lage an eine lichtelektrische Kammer<sup>1)</sup> gebracht

1) Siehe über die jetzt schon sehr gebräuchlich gewordene Meßweise „Lichtsummen“ S. 4. Heidelb. 1912.



werden, wo sie mit violettem Licht erregt wurde, während die Öffnung der Kammer mit einem Gelbfilter bedeckt war, das das violette Licht nicht durchließ, wohl aber das grüngelbe Phosphoreszenzlicht der  $\text{ZnCn } \alpha$ -Bande. Eine Kaliumzelle, besser noch eine Rubidiumzelle in der Kammer gestattete gut die Messung der Phosphoreszenzintensitäten in Elektrometerskalenteilen bei 20 Sekunden während der Wirkung. Es wurde nur das Leuchten während der Erregung gemessen, wobei sich zeigte, daß wenige Minuten Vorbelichtung genügten, um dieses Leuchten konstant und unabhängig von früheren Erregungen zu machen, was auch bei der benutzten hohen erregenden Intensität und der kurzen Dauer der  $\text{ZnCu } \alpha$ -Bande vor auszusehen war. Der geringe Leergang des Elektrometers bei geöffneter Kammer und erregender Belichtung eines leeren Tragglases, oder auch einer matten Aluminiumfläche anstelle des Phosphorpräparates wurde stets abgezogen, und die etwas veränderliche Kammerempfindlichkeit wurde durch eine unverändert aufbewahrte Normalschicht des Phosphors, außerdem mittels konstanter Glühlampe kontrolliert und zur Reduktion der Meßresultate berücksichtigt.

Die Messungen zeigten, daß stark geschwärzt erscheinende Schichten immer noch 0,3 der anfänglichen Phosphoreszenzintensität ergaben; Rückgang auf 0,05 war das äußerste, was in einem Falle erreicht wurde (15 Min. Belichtung der in Formalindampf befindlichen, mit Quarz bedeckten Phosphorschicht, 8 cm unter voll belasteter großer Quarzquecksilberlampe). Was die Wiederentschwärzung anlangt, so mußte berücksichtigt werden, daß das dazu meist benutzte Chlorgas den Phosphor auch an sich angreift. Es wurden deshalb stets zwei nahe gleiche Schichten zugleich benutzt, eine Schwärzungsschicht und eine Kontrollschicht. Beide wurden nebeneinander sowohl an die Quarzlampe in die Formalindämpfe (bzw. in mit Wasserdampf gesättigtes Wasserstoffgas) gebracht, nur die nicht zu schwärzende Kontrollschicht mit Glimmer beschattet, als auch bei der Entschwärzung nebeneinander dem mit viel Luft vermengten, in  $\text{KMnO}_4$ -Lösung gewaschenen Chlorgas ausgesetzt. Das Chlor wurde wirken gelassen bis beide Schichten gleich aussahen, was nur wenige Minuten dauerte, worauf schnell die chlorhaltige Luft durch ammoniakhaltige Luft verdrängt wurde. Zu be-

merken ist, daß die nach der Chlorierung auch bei der Kontrollschicht meist etwas zurückgegangene Phosphoreszenzfähigkeit nach einigen Stunden sich wieder erholte. Es sind in der folgenden Zusammenstellung nur Messungen angegeben, die genügend lange nach der Chlorierung bei bereits so gut wie konstant gewordenem Zustand des Phosphors stattgefunden haben.

Lichtelektrisch gemessene Phosphoreszenzhelligkeiten (wirksame Zentrenzahlen) von ZnCu  $\alpha$ -Schichten.

	Anfang	Nach erster Schwärzg. und Entschw.	Nach zweiter Schwärzg. und Entschw.	Nach dritter Schwärzg. und Entschw.	Nach vierter Schwärzg. und Entschw.	Nach nochmaliger Entschw.
Schwärzungsschicht	1.00	0.43 (Entschw. unvollk.)	0.72	0.79	0.75	0.79
Vergleichsschicht	1.00	0.99	0.90	0.88	0.90	0.94

Man sieht aus dieser Zusammenstellung, daß abgesehen von der ersten Entschwärzung, die unvollständig war, kein wesentlich anderer Rückgang der Phosphoreszenzfähigkeit nachweisbar war, als der bei gleicher Behandlung auch ohne Schwärzung eintrat. Der nach der zweiten Entschwärzung merklich erscheinende Unterschied zwischen der geschwärzt gewesenen und der Kontrollschicht vergrößerte sich nicht im mindesten weiter bei der dritten und vierten Entschwärzung. Daß letztere Entschwärzung vollkommen war, wurde durch die fünfte, ohne vorhergegangene neue Schwärzung vorgenommene Chlorierung erwiesen, die, wie die letzte Spalte der Tabelle zeigt, gegenüber der vierten Chlorierung keineswesentlich veränderten Resultate aufweist. Es ist also in der Tat kein deutliches Zeichen zu finden gewesen von einer nach der Entschwärzung übrig bleibenden Zerstörung der Phosphoreszenzzentren. Ähnliche Messungsergebnisse wie in obiger Zusammenstellung ergaben sich auch, wenn die Entschwärzung statt durch Chlor durch Schwefelammondämpfe bewirkt wurde, was allerdings viel längere Zeit erforderte.

11. Man hat also keinen Anhalt für eine andere Annahme als diese, daß Oxydationsmittel nicht endgültig die ausgeschiedenen oder gelockerten Zn-Atome in neue Bindungen bringen, sondern daß sie eine *Rückvereinigung* derselben mit den Atomen als Endresultat ergeben, so daß die von der Schwärzung ergriffenen Moleküle wieder ganz in ihren ursprünglichen Zustand zurückkommen. Auch die Beobachtung, daß eine schon dreimal geschwärzt und wieder entschwärzt gewesene Schicht noch ganz ebenso stark schwärzbar sich zeigte als daneben befindliche noch niemals geschwärzt gewesene Teile derselben Schicht, zeigt an, daß nicht etwa eine Anhäufung von  $\text{ZnO}$ , bzw.  $\text{ZnCl}_2$  an der Oberfläche, verbunden mit einem Verbrauch der in der äußersten Schicht liegenden, der Schwärzung zugänglichen Zentrenmoleküle stattgefunden haben kann, wie es der Fall sein müßte, wenn Rückbildung nicht stattfände.

Die hiermit ersichtliche auffallend leichte Wiederherstellbarkeit der lichtzerstörten Zentrenmoleküle stimmt übrigens gut überein mit der leichten, auch bei gar nicht hohen Temperaturen erfolgenden Entstehung dieser Zentren, welche wir durch die Beobachtung belegen konnten, daß ein Zinksulfidphosphor auch bei Temperaturen weit unter Glühhitze sich ausbildete, wenn nur genügend lange Zeit dazu gelassen war.<sup>1)</sup> Verständlich ist es auch, daß die Bildung der Zentrenmoleküle um so leichter erfolgen kann, wenn — wie nach der Lichtschwärzung — die nötigen Bestandteile in dichter Nähe und vielleicht auch noch richtiger Lage bereits nebeneinander vorhanden sind.<sup>2)</sup> Die Oxydationsmittel spielen bei dieser Rückbildung dann nur eine „katalytische“ Rolle.

Besonders eigentümlich ist die *Rolle des Wassers*, dessen Gegenwart wir für die Lichtschwärzung notwendig gefunden haben.

---

1) Vgl. die betr. Fußnote zu 6. Immerhin dürften in dem dort erwähnten Falle die auf Dächern manchmal sehr hohen Sommertemperaturen mitgewirkt haben, während aber doch wohl Temperaturen über  $50^\circ \text{C}$  ausgeschlossen waren. Ein 7 Jahre lang bei gewöhnlicher Zimmertemperatur aufbewahrter, druckzerstörter  $\text{ZnCu}$   $\alpha$ -Phosphor zeigte keine Zeichen von Rückbildung seiner Zentren.

2) Vgl. den ähnlichen Fall der Wiederentfärbung bei den druckzerstörten und gefärbten Erdalkaliphosphoren. Elster- u. Geitel-Festschr. S. 685.

Allerdings ist Gegenwart von Wasser zum Ablauf sehr vieler chemischer Vorgänge notwendig oder doch förderlich, bei denen es im Endresultat gar nicht beteiligt ist. Beispielsweise findet man angegeben, daß Natriummetall in ganz trockenem Chlorgas sich nicht entzündet, ganz trockenes Chlorknallgas im Lichte nicht explodiert. Jedoch genügen in solchen Fällen offenbar so geringe Spuren von Wasser, daß das Versagen der Reaktion beim vollständigen Fehlen desselben gar nicht leicht zur Beobachtung kommt. In unserem Falle der Lichtzersetzung des Zinksulfids fanden wir aber mehr Wasser notwendig; es mußte die Umgebung des Sulfids mit Wasserdampf gesättigt oder besser übersättigt sein, und noch besser war die Versenkung des Sulfids unter flüssiges Wasser. Vielleicht hängt der Mehrbedarf an Wasser in unserem Falle damit zusammen, daß hier ein fester Körper umzusetzen ist, bei dem außerordentlich viel mehr Moleküle in der Raumeinheit vorhanden sind als in dem meist beachteten Falle von Gasen. Man könnte annehmen, daß Wassermoleküle an Schwefelatome der Zentrenmoleküle sich lagern, die an der Oberfläche des Sulfids sich befinden und daß dadurch die Trennung von S und Zn befördert wird, gleich wie Wassermoleküle durch ihre Anlagerung an die noch verbundenen Ionen eines festen Salzes bekanntlich die Trennung dieser Ionen — gleichzeitig mit der Lösung des Salzes — bewirken.<sup>1)</sup> Es könnte aber auch die Anlagerung eine Förderung der Lichtabsorption in den S-Atomen zur Folge haben. Jedenfalls muß die Abtrennung von Zn und S durch die Energie des absorbierten Lichtes erfolgen; die für je eine Abtrennung erforderliche Mindestenergie ist aus der oben ermittelten Wellenlängengrenze unmittelbar angebbar.

Daß *nur Zentrenmoleküle* die Lichtschwärzung erfahren, könnte durch die Annahme erklärt werden, daß nur diejenigen S-Atome der eben betrachteten Wirkung von Wasser und Licht

---

1) Die Vorstellung vom Lösungsvorgang und von der elektrolytischen Dissoziation als eines Anlagerungs- bzw. Ineinanderlagerungsvorganges habe ich früher entwickelt („Probleme komplexer Moleküle“ I, Heidelb. 1914 und Ann. d. Phys. 61. S. 727 usf. 1920). Neuerdings ist der Gegenstand von Herrn K. Fajans weiter bearbeitet worden (siehe Phys. Ber. 3. S. 165. 1922).

unterliegen, die auch zur Vermittelung der Anlagerung fremder Metallatome (z. B. Cu in  $\text{ZnCu } \alpha$ -Phosphor) befähigt sind, wozu nach früher entwickelter Vorstellung<sup>1)</sup> die Aneinanderbindung mehrerer S-Atome erforderlich ist.

Heidelberg, Radiologisches Institut, 19. April 1922.

---

1) Siehe „Ausleuchtung und Tilgung“ III. S. 76. Note 319. Heidelb. 1918.

(Eingegangen 22. April 1922.)

---

## *2. Der Feinbau der Atomkerne und die Veränderung des Coulombschen Gesetzes im Innern der Kerne.*

### *I. Die Atomkerne von Lithium und Isohelium; von Maximilian Camillo Neuburger.*

Die ersten Arbeiten über die Abweichungen vom Coulombschen Gesetze in großer Nähe von elementaren elektrischen Ladungen sind von A. Smekal<sup>1)</sup> veröffentlicht worden, welcher die Atomkerne von Helium und von Rutherfords  $X_3$  hierzu heranzog. Da man bei dem von uns angegebenen allgemeinen Kernmodell und von den aus diesem folgenden speziellen „Kernformeln“ schon von einer Bestätigung<sup>2)</sup> durch die experimentelle Erfahrung sprechen kann, können jetzt auch andere Atomkerne in ihrem räumlichen Aufbau und zugleich die Veränderungen des Coulombschen Gesetzes ins Innere der Atomkerne genauer untersucht werden. Die von uns angegebenen Kernformeln<sup>3)</sup> haben etwa dieselbe Bedeutung wie die chemischen Bruttoformeln, sie sagen also gar nichts über die räumliche Lage der Kernbausteine in den Atomkernen aus.

Wir nehmen hier gleich von den weiter unten angegebenen Ergebnissen vorweg, daß nämlich die Abweichungen vom Coulombschen Gesetze bei den Atomkernen von höherer Ordnungszahl, als die von Smekal benützten geringer werden. Wir betrachten in dieser Arbeit den Atomkern von Lithium mit dem Atomgewicht 6 und den Atomkern von „Isohelium“, das ist Rutherfords  $X_3$ . Letzteren Atomkern behandeln wir

1) A. Smekal, Wien. Ber. 129, S. 455—481. Nr. 5. 1920; 130. S. 149—157. Nr. 3/4. 1921.

2) M. C. Neuburger, Erwiderung auf die Arbeit von Herrn P. Valeras „Das Neuburgersche Kernmodell und die Erfahrung“. Phys. Zeitschr. 23. 1922.

3) M. C. Neuburger, Phys. Zeitschr. 23. S. 133—136. Nr. 6. 1922.

deshalb noch einmal, da wir das Atomgewicht dieses Kernbausteines<sup>1)</sup> genauer bestimmen konnten und A. Smekal (a. a. O.) sich bei der Untersuchung über diesen Atomkern eines geringeren Atomgewichtes bedient hat.

Für die Untersuchung der Bewegungszustände in den Atomkernen bedienen wir uns der Kreisbahnen, obwohl diese für das Atom längst aufgegeben worden sind und wegen der Feinstruktur der Spektren auch aufgegeben werden mußten. Für Atomkerne sind aber derzeit Kreisbahnen noch genügend, so daß es heute noch nicht nötig ist z. B. mit Ellipsenbahnen zu rechnen, obwohl wahrscheinlich auch bei den Atomkernen elliptische Bahnen vorkommen dürften.

Die spezielle Kernformel für  $\text{Li}_6$  ist nach unserem Kernmodell (a. a. O.)

$$F_k^{\text{Li}_6} = 2\alpha_i + \beta.$$

Es bedeuten  $\alpha_i$ , die Atomkerne von Isohelium (Atomgewicht 3) und  $\beta$  das Kernelektron. Im  $\text{Li}_6$ -Kern rotieren die beiden  $\alpha_i$ -Teilchen um das Kernelektron, und zwar darf man vorläufig die Annahme machen, daß die beiden  $\alpha_i$ -Teilchen auf einem „Ringe“ um das  $\beta$ -Teilchen rotieren. Diese Annahme ist nicht neu, sie wurde für den Helium- und Isoheliumkern zuerst von Lenz<sup>2)</sup> und später von A. Smekal<sup>3)</sup> gemacht und auch rechnerisch durchgeführt.

Die dynamische Gleichgewichtsbedingung lautet daher

$$(1) \quad \frac{\mu v_R^2}{\varrho} = \frac{e^2}{\varrho^3} F$$

und die Quantenbedingung für das Impulsmoment

$$(2) \quad \mu v_R \varrho = \frac{h}{2\pi},$$

wobei  $\mu$  die Masse der  $\alpha_i$ -Teilchen,  $v_R$  deren Geschwindigkeit und  $\varrho$  den Radius des Teilchenringes bezeichnen. Aus (1) und (2) folgt für  $\varrho$

$$(3) \quad \varrho = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 \mu} F^{-1},$$

1) M. C. Neuburger, Phys. Zeitschr. 23. 145—146. Nr. 7. 1922.

2) Von Lenz für He ohne Abänderung des Coulombschen Gesetzes.

3) Von Smekal für He und Isohelium mit Abänderung des Coulombschen Gesetzes (a. a. O.).

für  $v_R$

$$(4) \quad v_R = \frac{2\pi e^2}{h} F$$

und für die Umlauffrequenz  $\omega$

$$(5) \quad \omega = \frac{4\pi^2 e^4 \mu}{h^3} F^2.$$

Da die Ladung der rotierenden  $\alpha_i$ -Teilchen zwei elektrische Elementarquanten und die Ladung des Zentralkörpers oder des „Mesokerns“, wie wir vorschlagen wollen ihn zu bezeichnen, ein elektrisches Elementarquantum beträgt, so ist  $F$  durch den Ausdruck

$$F = 2 - 4S_f$$

bestimmt. Die Zeichen  $f$  und  $S_f$  haben dabei die Bedeutung der Anzahl der rotierenden Teilchen, bzw.  $S_f$  den bekannten Wert

$$S_f = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{s=f-1} \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{f}}.$$

Tabellen für die Werte von  $S_f$  finden sich bei N. Bohr, „Abhandlungen über Atombau“ und A. Sommerfeld, „Atombau und Spektrallinien“.

Für den  $\text{Li}_6$ -Kern ist  $S_f$ , da zwei Teilchen rotieren,

$$(6) \quad f = 2 \quad \dots \quad S_f = \frac{1}{4},$$

also

$$(7) \quad F = 1.$$

Die potentielle Energie wird in diesem Falle

$$(8) \quad E_{\text{pot}} = -\frac{8\pi^2 e^4 \mu}{h^3},$$

die kinetische Energie

$$(9) \quad E_{\text{kin}} = +\frac{4\pi^2 e^4 \mu}{h^2}$$

und die Gesamtenergie  $W$  des Systems

$$(10) \quad W = -\frac{4\pi^2 e^4 \mu}{h^2}.$$

Die Stabilität des Systems ist durch die sinngemäße „Anwendung derjenigen Gleichung gegeben, die N. Bohr (a. a. O.)



für sein Atommodell mitgeteilt hat. Die Anschreibung dieser Gleichung kann hier unterbleiben, da der Ausdruck<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{s} > k_{f\theta} - k_{fel},$$

mit obgenannter Bedingung von Bohr gleichbedeutend ist.  $s$  ist die Ladung der rotierenden Teilchen und hat im Falle des  $\text{Li}_0$ -Kern den Wert 2. Die Werte von  $k_{f\theta} - k_{fel}$  finden sich ebenfalls bei N. Bohr (a. a. O.). In unserem Falle ist

$$(11) \quad k_{f\theta} - k_{fel} = \frac{1}{4}$$

und somit die Stabilitätsbedingung

$$(12) \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Das Modell die  $\text{Li}_0$ -Kerns ist also stabil. Der obige Stabilitätsausdruck ist die aus der klassischen Mechanik ableitbare Gleichung für das Gleichgewicht für Ortsveränderungen der rotierenden Teilchen senkrecht zur Ebene des Ringes.

Da  $e$ ,  $h$  und  $\mu$  die Werte

$$e = 4,774 \cdot 10^{-10} \text{ esu},$$

$$h = 6,545 \cdot 10^{-27} \text{ erg/sec},$$

$$\mu = 4,95 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

haben, erhält man vorerst folgende Zusammenstellung von Werten für den  $\text{Li}_0$ -Kern.

$$F = 1,$$

$$v_R = 2,18 \cdot 10^8 \text{ cm/sec},$$

$$\rho = 9,62 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

$$\omega = 3,626 \cdot 10^{10},$$

$$E_{\text{pot}} = -4,74 \cdot 10^7 \text{ erg},$$

$$E_{\text{kin}} = 2,37 \cdot 10^7 \text{ erg},$$

$$W = -2,37 \cdot 10^7 \text{ erg}.$$

Wie man sofort erkennt, erhält man für  $\rho$  einen viel zu großen und somit für  $W$  einen viel zu kleinen Wert. Wir verweisen bezüglich des Wertes von  $\rho$  auf unsere Arbeit<sup>2)</sup> über die Dimensionen der Atomkerne.

1) J. W. Nicholson, Month. Not. Roy. Astro. Soc. 72. S. 52. 1912.

2) Erscheint demnächst.

Um zu mit der Experimentalerfahrung nicht in Widerspruch stehenden Werten zu gelangen, hat man die Abweichung des Coulombschen Gesetzes im Kerninnern zu berücksichtigen und daher das allgemeinere Kraftgesetz

$$\frac{e}{q^a}$$

anzuwenden. Die Berechnungen können, da die Distanzen in unserem Modell des  $\text{Li}_6$ -Kerns von derselben Größenordnung sind mit einem mittleren Wert des, mit  $q$  variablen Exponenten  $a$  durchgeführt werden. Die Bewegungsgleichungen lauten jetzt

$$(1a) \quad \mu q^{a-1} v_R^2 = e^2 F',$$

$$(2) \quad \mu q v_R = \frac{h}{2\pi},$$

$$(13) \quad F' = \varepsilon - \varepsilon^2 S_f,$$

also für  $\text{Li}_6$

$$F' = 2 - 4 S_f,$$

$$(14) \quad S_f = \frac{1}{2^a} \sum_{s=1}^{S=f-1} \frac{1}{\left(\sin \frac{S\pi}{f}\right)^{a-1}}.$$

Die potentielle Energie wird nun

$$(15) \quad E_{\text{pot}} = \frac{e^2}{q^{a-1}} \cdot \frac{f F'}{1-a},$$

die kinetische Energie

$$(16) \quad E_{\text{kin}} = \frac{f}{2\mu} \left( \frac{h}{2\pi q} \right)^2$$

und wegen<sup>1)</sup>

$$E_{\text{kin}} = \frac{1-a}{2} \bar{E}_{\text{pot}}$$

$$(17) \quad E_{\text{kin}} = \frac{e^2}{2 q^{a-1}} \cdot f F'.$$

Für die Gesamtenergie erhält man den Ausdruck

$$(18) \quad W = \frac{8-a}{1-a} \cdot \frac{h^2}{8\pi^2 \mu q^2} f.$$

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 2. Aufl. S. 475.

Der Radius  $\rho$  bestimmt sich aus obigen Gleichungen zu

$$(19) \quad \rho^{a-3} = \frac{4 \pi^3 e^2 \mu}{h^3} F'.$$

Die Grenzwerte für den Exponenten  $a$  sind wegen der Quantenbedingung (A. Smekal, a. a. O.)

$$2 \leq a < 3.$$

Für den  $\text{Li}_6$ -Kern erhält man für  $a$ ,  $F'$ ,  $\rho$  und  $W$  die Werte in Tabelle 1.

Tabelle 1.

$a$	$F'$	$\rho$ in cm $\times 10^{-13}$	$W$ in erg $\times 10^{-6}$
2,040	1,0270	2,95	— 2,32
2,044	1,0300	2,61	— 2,94
2,045	1,0307	2,53	— 3,13
2,046	1,0314	2,45	— 3,32
2,050	1,0341	2,07	— 4,24

Um den Wert für  $W$  auf andere Weise zu erhalten, ist es zweckmäßig, sich der Energie-Massebeziehung, welche die Relativitätstheorie liefert, zu bedienen. Bezeichnen die chemischen Symbole ( $\text{Hei}$  = Isohelium) zugleich die Atomgewichte und  $\mathcal{E}$  das „Atomgewicht“ der Elektronen, so ist

$$(2 \text{ Hei} - 3 \mathcal{E}) - (\text{Li}_6 - 3 \mathcal{E}) \cong \frac{W \cdot \text{Hei}}{\mu c^2}$$

oder auch

$$\text{Li}_6 \leq \text{Hei} \left( 2 - \frac{W}{\mu c^2} \right)$$

und zahlenmäßig

$$2,2 \cdot 10^{-3} \cong \frac{3,001 \cdot W}{4,455 \cdot 10^{-3}}$$

Daraus folgt

$$W = - 2,97 \cdot 10^{-6} \text{ erg.}$$

Korrigiert man diesen Wert der Gesamtenergie  $W$  bei Berücksichtigung der Fehlerquellen um etwa 5 Proz., so wird

$$W = - 3,13 \cdot 10^{-6} \text{ erg.}$$

Dieser Wert findet sich in Tabelle 1 für

$$a = 2,045.$$

Man erhält also mit dem Kraftgesetz

$$\frac{e}{q^{3,045}},$$

anstatt der früheren Werte jetzt folgende Zusammenstellung

$$F = 1,0307,$$

$$v_R = 8,31 \cdot 10^8 \text{ cm},$$

$$\rho = 2,53 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

$$\omega = 5,23 \cdot 10^{20},$$

$$E_{\text{pot}} = -6,55 \cdot 10^{-6} \text{ erg},$$

$$E_{\text{kin}} = 3,42 \cdot 10^{-6} \text{ erg},$$

$$W = -3,13 \cdot 10^{-6} \text{ erg}.$$

Man kann die durch Zusammentritt von zwei  $\alpha_i$ -Teilchen zu dem  $\text{Li}_6$ -Kern frei werdende Energie als die „Bildungswärme“ der „Kernverbindung“ bezeichnen. Da der Energiedefekt für das Grammatom  $\text{Li}_6$

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,0022 c^2$$

ist, so wird die „Bildungswärme“  $Q$

$$Q = \frac{2,2 \cdot 10^{-8} c^2}{4,19 \cdot 10^{10}} = 4,72 \cdot 10^7 \text{ Cal.}$$

Eine Benützung der Relativitätskorrektur ist für das Modell des  $\text{Li}_6$ -Kerns nicht nötig, da

$$\frac{v_R}{c} = 2,77 \cdot 10^{-2}$$

ist.

Für den Kern des Isoheliums, das  $\alpha_i$ -Teilchen, dessen Kernformel

$$K^{\text{Hei}} = 3 H^+ + \beta$$

ist, folgt, daß die Gesamtenergie den Wert von

$$[(3 H - 3 \mathcal{E}) + \mathcal{E} - (\text{Hei} - 2 \mathcal{E})] \frac{m_H c^2}{H} = -3,28 \cdot 10^{-5} \text{ erg}$$

hat.

Tabelle 2 gibt die für das  $\alpha_i$ -Teilchen erhaltenen Werte für  $a$ ,  $F$ ,  $\rho$  und  $W$ , wobei für  $H$  und  $m_H$  die Werte

$$H = 1,00775,$$

$$m_H = 1,662 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

benutzt wurden.

Tabelle 2.

$a$	$F'$	$\varrho$ in cm $\times 10^{-13}$	$W$ in erg $\times 10^{-5}$
2,125	0,4610	1,56	— 3,14
2,126	0,4613	1,505	— 3,37
2,127	0,4616	1,45	— 3,59

Diese Werte sind mit den Ausdrücken (13), (14), (18), (19), berechnet. Nehmen wir hier als Korrektur der Fehlerquellen etwa 10 Proz des obigen Wertes von  $W$ , so wird die Gesamtenergie für das  $\alpha$ -Teilchen

$$W = - 3,60 \cdot 10^{-5} \text{ erg.}$$

Für diesen Wert von  $W$  ergibt sich nach Tabelle 2

$$\varrho = 1,45 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

Die „Bildungswärme“ des  $\alpha$ -Teilchen beträgt, da

$$\Delta E = 2,2 \cdot 10^{-2} c^2,$$

$$Q = \frac{2,2 \cdot 10^{-2} c^2}{4,19 \cdot 10^{10}} = 4,72 \cdot 10^8 \text{ Cal.}$$

Die Abweichung vom Coulombschen Gesetze ist für den Isoheliumkern bedeutend größer als für den  $\text{Li}_6$ -Kern.

In unserer genetischen Übersicht<sup>1)</sup> kommt auch ein Atomkern vor, der zwei Teilchenringe bei nur einem „Mesokern“ besitzen sollte. Es ist dies der Kern von  $B_9$ . Dieses Element wurde von F. W. Aston nicht aufgefunden, es existiert also gar nicht. Und in der Tat ergibt eine Durchrechnung seines Modells, daß dieser Atomkern völlig instabil ist. Da unser allgemeines Kernmodell von allen bisher veröffentlichten Hypothesen die geringste Anzahl solcher unauffindbarer Elemente enthält, haben wir vorgeschlagen, solche Elemente als „Brückenelemente“ zu bezeichnen, da sie wegen der genetischen Beziehungen der Atomkerne zueinander als Übergangsglieder nötig sind.

Den hier erhaltenen oberen Grenzen der Kernradien der Atomkerne von  $\text{Li}_6$  und Isohelium stehen die unteren Grenzen<sup>2)</sup>

1) Vgl. Fußnote 3, S. 574.

2) Vgl. Fußnote 2, S. 571.

$$\text{Li}_8 \dots \varrho_{\min} = 1,05 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

$$\text{Hei} \dots \varrho_{\min} = 0,7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

gegenüber.

Diesen unteren Grenzwerten für  $\varrho$  entspricht eine Gesamtenergie von

$$\text{Li}_8 \dots W \sim 1 \cdot 10^{-6} \text{ erg.}$$

Dieser Wert von  $W$  stellt die obere Grenze vor. Die Gesamtenergien der Atomkerne sind sicher nicht größer, da für die Emission von  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Teilchen bei den radioaktiven Atomkernen<sup>1)</sup> die oberen Grenzen der aufgewandten Energien etwa  $5 \cdot 10^{-6}$  erg betragen, aber sicher geringer sind.

#### Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die Abweichungen vom Coulombschen Gesetze bei Atomkernen von höherer Ordnungszahl als zwei viel geringer sind. Als Beispiel wird der  $\text{Li}_8$ -Kern behandelt.

Die oberen Grenzen der Radien der Atomkerne von  $\text{Li}_8$  und Isohelium (Hei) sind

$$\text{Li}_8 \dots 2,53 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

$$\text{Hei} \dots 1,45 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Der Kern des von F. W. Aston nicht aufgefundenen Elementes  $B_9$  wird als völlig instabil erklärt.

Wien, den 25. Mai 1922.

1) Vgl. Fußnote 2, S. 577.

(Eingegangen 19. Juni 1922.)

### 3. *Grundriß einer Theorie des anisotropen Strahlungsfeldes; von George Jaffé.*

---

Sind verschieden temperierte Körper in ein materielles Medium eingebettet, und zwar unter solchen Umständen, daß die Wärmeleitung neben der Wärmestrahlung vernachlässigt werden kann, so wird das entstehende Strahlungsfeld notwendiger Weise anisotrop sein. Das gilt sowohl für stationäre, wie für zeitlich veränderliche Vorgänge, denn es könnte keine Energieübertragung von den wärmeren zu den kälteren Körpern, oder zwischen verschiedenen Stellen des Feldes stattfinden, wenn überall die Strahlungsintensität in allen Richtungen die gleiche wäre.

Das Zwischenmedium ist in strahlungstheoretischer Hinsicht durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und den Absorptionskoeffizienten der Wärmestrahlen, beide in Funktion von der Temperatur und der Schwingungszahl, gekennzeichnet, und der Strahlungszustand ist völlig beschrieben, wenn die Strahlungsintensität einer jeden Strahlenart an jeder Stelle des Feldes für jede Richtung bekannt ist. Es entsteht so die Aufgabe, den Strahlungszustand zu ermitteln, wenn Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorptionskoeffizient — im allgemeinsten Falle als Funktion des Ortes — gegeben und geeignete Grenzbedingungen vorgeschrieben sind, etwa der Art, daß Beschaffenheit und Temperatur der begrenzenden Körper, und damit die von ihnen ausgehende Strahlung, als bekannt angenommen wird. Diese Aufgabe ist rein phänomenologisch, wenn die Abhängigkeit der charakteristischen Zustandsgrößen, d. h. also der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und des Absorptionskoeffizienten des Mediums und des Emissionsvermögens der begrenzenden Körper, von Temperatur und Schwingungszahl als bekannt angesehen wird.

Für die Behandlung des so gekennzeichneten Problems erweisen sich zwei Verfahren als anwendbar. Das eine besteht

in der Auflösung einer linearen, inhomogenen Integralgleichung, die Hilbert aufgestellt und als Grundlage für eine „Kinetik der Strahlung“ bezeichnet hat<sup>1)</sup>; das zweite bildet eine Verallgemeinerung derjenigen Rechenmethode, die Eddington für seine Theorie des Strahlungsgleichgewichtes der Sterne entwickelt hat.<sup>2)</sup> Beide Verfahren unterscheiden sich im wesentlichen durch die Wahl der grundlegenden Zustandsgröße. Hilbert wählt hierzu den Emissionskoeffizienten, der als Funktion des Ortes zu bestimmen ist; die Strahlungsintensität als Funktion der Richtung wird dadurch zu einer abgeleiteten Größe, die sich durch einen Integrationsprozeß ergibt. Umgekehrt ist bei Eddington die Strahlungsintensität die primäre Unbekannte; aus ihr gewinnt man die Strahlungsdichte, und damit schließlich den Emissionskoeffizienten durch eine Integration.

Nach beiden Verfahren wird im Folgenden die Lösung in der Form von Reihen angesetzt werden, nach der Hilbertschen Methode allerdings unter Beschränkung auf den stationären Fall. Es wird sich zeigen, daß die beiden Ansätze sich ergänzen. Der physikalische Zustand wird nämlich in maßgebender Weise dadurch bestimmt, ob die Absorption als stark oder als schwach zu bezeichnen ist; natürlich muß noch genau festgelegt werden, unter welchen numerischen Verhältnissen der eine oder andere Fall vorliegt. Nun liefert die Eddingtonsche Methode eine sehr einfache Lösung für den Grenzfall sehr starker Absorption, während die Hilbertsche Integralgleichung umgekehrt für schwache Absorption bequem zu behandeln ist.

Im ersten Paragraphen werden die Grundgleichungen des Problems aufgestellt. Es sind zwei Gleichungen, die als „Kontinuitätsgleichung“ und „Bewegungsgleichung“ der Strahlung bezeichnet werden können; denn die erste spricht den Energiesatz für jedes Volumelement aus, und die zweite bringt zum Ausdruck, auf welche Weise Strahlung von bestimmter Richtung bei ihrem Fortschreiten um ein Wegelement ihre Intensität durch Absorption und Neuemission verändert. Zur Behandlung dieser Gleichungen wird die Strahlungsintensität in Form einer Reihe angesetzt, die nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitet. Die ersten Koeffizienten dieser Reihe haben eine einfache

1) D. Hilbert, *Physik. Zeitschr.* 18, S. 1056. 1912.

2) A. S. Eddington, *Zeitschr. f. Phys.* 7, S. 351. 1921.



physikalische Bedeutung: der Koeffizient nullter Ordnung steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der Strahlungsdichte, und die drei Koeffizienten erster Ordnung sind den Komponenten eines Vektors proportional, der dem Wärmestrom in der Theorie der Wärmeleitung analog ist und als „Strahlungsstrom“ bezeichnet wird. Durch Einführung dieses Vektors vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung außerordentlich, während sich aus der Bewegungsgleichung partielle Differentialgleichungen für die Koeffizienten der Kugelfunktionenreihe ergeben.

Im zweiten Paragraphen wird das stationäre Problem behandelt. Dabei zeigt sich, daß in Verallgemeinerung eines für isotrope Strahlung gültigen Satzes der Emissionskoeffizient der Strahlungsdichte proportional ist. Bei Beschränkung auf den Grenzfall starker Absorption ist der Zustand durch Strahlungsdichte und Strahlungsstrom in ausreichender Weise bestimmt und es ergibt sich das einfache Resultat, daß der Strahlungsstrom dem Gefälle der Strahlungsdichte proportional ist. Die Verhältnisse liegen also dann völlig analog denjenigen bei der Wärmeleitung; es tritt nur — wenn die Gesamtstrahlung betrachtet wird — die vierte Potenz der absoluten Temperatur an Stelle der ersten und eine, dem Absorptionskoeffizienten umgekehrt proportionale Materialkonstante an Stelle des Wärmeleitvermögens. Die nächste Approximation läßt sich noch allgemein behandeln, aber die Berücksichtigung höherer Glieder führt zu weitläufigen Rechnungen und erfordert für die Grenzbedingungen besondere Betrachtungen, die nur für den einfachsten Sonderfall — das lineare Problem — durchgeführt werden.

Für den Fall schwacher Absorption läßt sich die Lösung der Hilbertschen Integralgleichung in eine Reihe entwickeln, die nach steigenden Potenzen des Absorptionskoeffizienten fortschreitet, und deren einzelne Glieder durch iterierte Integration gefunden werden können. Als Beispiel wird wiederum das eindimensionale Problem behandelt.

Der dritte Paragraph enthält die Theorie nicht stationärer Vorgänge, jedoch unter Beschränkung auf den Grenzfall starker Absorption. Es herrscht dann wiederum eine weitgehende Analogie mit den entsprechenden Problemen der Wärmeleitung. Die Fouriersche Methode bleibt anwendbar, wie an

dem einfachsten Spezialfall gezeigt wird, und die Analogie wird vollständig — in dem oben dargelegten Sinne —, wenn man eine einschränkende Bedingung über die Natur der Anfangszustände einführt.

Im vierten Paragraphen endlich wird, wiederum unter Beschränkung auf den erwähnten Grenzfall, Wärmeleitung und Wärmestrahlung nebeneinander behandelt. Die Gleichungen, zu denen man so gelangt, gestatten insbesondere zu entscheiden, wann die eine Form der Energieübertragung neben der anderen zu vernachlässigen ist. Stationäre Probleme lassen sich unmittelbar auf die entsprechenden Aufgaben der Wärmeleitungstheorie zurückführen.

### § 1. Die Grundgleichungen.

Wir werden unser Problem in der elementarsten Form behandeln und darum eine Reihe von vereinfachenden Annahmen einführen. Der Träger des Strahlungsfeldes, das Medium  $M$ , soll in materieller Beziehung als homogen und isotrop, außerdem als ruhend vorausgesetzt werden. Eine Übertragung von Wärmeenergie soll nur durch Strahlung erfolgen; der Einfluß der Wärmeleitung wird also völlig vernachlässigt. Erst im letzten Paragraphen wird untersucht werden, unter welchen physikalischen Bedingungen diese Vernachlässigung statthaft ist.

Von einer Streuung und Dispersion der Wärmestrahlen soll abgesehen werden. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit habe demnach überall im Felde den konstanten Wert  $q$ . Das Strahlungsfeld sei von einer Reihe von Körpern  $K_1, K_2, \dots$  begrenzt, deren jeder sich auf konstanter absoluter Temperatur  $T$  befinde und eine ideal schwarze Oberfläche besitze. Unter dieser Annahme braucht auch die Reflexion nicht berücksichtigt zu werden. Erstreckt sich das Feld ins Unendliche, so möge dort die Grenzbedingung  $T = 0$  herrschen.

In der Bezeichnung der Zustandsgrößen schließen wir uns an Plancks „Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung“<sup>1)</sup> an. Es bedeute demnach  $\mathfrak{R}$ , die spezifische Intensität der linear polarisierten monochromatischen Strahlung von der Schwingungszahl  $\nu$ . Wir werden durchweg die

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 3. Aufl. Leipzig 1919.

Strahlung als unpolarisiert behandeln und im Anschluß an Planck mit  $2\mathfrak{R}_\nu$  die Intensität der unpolarisierten Strahlung bezeichnen. Sie ist, außer von der Schwingungszahl  $\nu$ , noch vom Ort und von der Richtung im Raum abhängig. Zur Bezeichnung der Lage wählen wir rechtwinklige Koordinaten  $x, y, z$ , und zur Festlegung von Richtungen führen wir die beiden Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  ein, die bei Gebrauch räumlicher Polarkoordinaten mit der  $x$ -Achse als Polarachse auftreten. Es ist also  $\mathfrak{R}_\nu$  Funktion von  $\nu, x, y, z, \vartheta, \varphi$  und  $t$ .

Die Gesamtintensität der Strahlen aller Schwingungszahlen in einer gegebenen Richtung sei  $K$ , so daß

$$(1) \quad K = \int_0^\infty 2\mathfrak{R}_\nu \, d\nu$$

zu setzen ist.

Die von einem Volumelement  $d\nu$  während der Zeit  $dt$  im Öffnungskegel  $d\Omega$  und im Spektralintervall  $d\nu$  ausgesandte Energie sei

$$2\varepsilon_\nu \cdot d\nu \, dt \, d\Omega \, d\nu,$$

und es werde

$$(2) \quad e = \int_0^\infty \varepsilon_\nu \, d\nu$$

gesetzt. Diese Emission stellt die reine Temperaturstrahlung dar. Wir wollen nun noch berücksichtigen, daß in jedem Volumelement Wärmeerzeugung, etwa auf Kosten chemischer oder anderer Energieformen, stattfindet. Demgemäß bedeute

$$2\mathfrak{E}_\nu \cdot d\nu \, dt \, d\Omega \, d\nu$$

diejenige Energiemenge vom Bereich  $d\nu$ , die im Volumelement  $d\nu$  auf Kosten anderer Energiearten entsteht und während  $dt$  in der Richtung  $d\Omega$  emittiert wird. Analog Gleichung (2) soll

$$(3) \quad E = \int_0^\infty \mathfrak{E}_\nu \, d\nu$$

gesetzt werden.

Den Absorptionskoeffizienten der Strahlung von der Schwingungszahl  $\nu$  bezeichnen wir mit  $\alpha_\nu$ .

Die räumliche Strahlungsdichte  $u_\nu$  der Strahlung von der Schwingungszahl  $\nu$  ergibt sich in bekannter Weise<sup>1)</sup> zu

$$(4) \quad u_\nu = \frac{2}{q} \int \mathfrak{R}_\nu d\Omega,$$

und demnach wird die Gesamtstrahlungsdichte

$$(5) \quad u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{1}{q} \int K d\Omega.$$

Wir definieren nun noch eine wichtige Zustandsgröße, von der sich zeigen wird, daß sie den Charakter eines Vektors hat. Sei nämlich  $df$  ein irgendwie orientiertes Flächenelement, und werde die Richtung seiner Normale durch die Werte  $\vartheta_0$  und  $\varphi_0$  bezeichnet, so soll

$$\mathfrak{S}_\nu(\vartheta_0, \varphi_0) \cdot df dt d\nu$$

diejenige Energiemenge vom Bereich  $d\nu$  sein, welche in der Zeit  $dt$  mehr von der negativen Seite von  $df$  zur positiven hindurchstrahlt als umgekehrt. Als positiv ist dabei diejenige Seite bezeichnet, nach welcher die Normale hinweist.  $\mathfrak{S}_\nu(\vartheta_0, \varphi_0)$  ist offenbar an jeder Raumstelle eine Funktion der Richtung. Da der Cosinus des Winkels  $\xi$ , den die Normale mit einer beliebigen Richtung  $\vartheta, \varphi$  bildet, durch die Gleichung

$$\cos \xi = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

gegeben ist, hat man nach der obigen Definition

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_\nu(\vartheta_0, \varphi_0) &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \mathfrak{R}_\nu [\cos \vartheta \cos \vartheta_0 \\ &\quad + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Die entsprechende Größe, die durch Integration nach der Schwingungszahl entsteht, definieren wir durch die Gleichung

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} S(\vartheta_0, \varphi_0) &= \int_0^\infty \mathfrak{S}_\nu(\vartheta_0, \varphi_0) d\nu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi K [\cos \vartheta \cos \vartheta_0 \\ &\quad + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Nunmehr sind wir in der Lage, die Grundgleichungen aufzustellen. Zur Ableitung der Kontinuitätsgleichung der Strah-

1) M. Planck, a. a. O., S. 23.

lung betrachten wir ein Elementarparallelepiped von den Kantenlängen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Seinen Energieinhalt bezeichnen wir mit  $U dv$ ; dabei ist

$$(8) \quad U = u + \int_0^T c \rho dT$$

zu setzen, wenn unter  $U$  die Strahlungsenergie und die „thermische Energie“ — d. h. der Wärmeinhalt des materiellen Mediums — zusammengefaßt wird. Dabei bedeutet  $\rho$  die Dichte und  $c$  die spezifische Wärme dieses Mediums.

Während des Zeitelementes  $dt$  erfährt  $U$  eine Änderung

$$\frac{\partial U}{\partial t} dt dv,$$

und zwar einerseits durch die Wärmeerzeugung auf Kosten anderer Energien im Betrage von

$$8\pi E dv dt,$$

und zweitens durch die Wärmestrahlung.

Wir wollen mit  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  den Wert von  $S(\vartheta_0, \varphi_0)$  verstehen, wenn die Normalenrichtung des bei der Erklärung von  $S(\vartheta_0, \varphi_0)$  eingeführten Flächenelementes mit der positiven  $x$ -,  $y$ - oder  $z$ -Achse zusammenfällt. Dann strahlt durch die zur  $x$ -Achse senkrechten Flächen des Elementarparallelepipeds die Energiemenge

$$-\frac{\partial S_x}{\partial x} dx \cdot dy dz dt$$

mehr ein als aus, und entsprechende Ausdrücke gelten für die anderen Flächen. So erhalten wir schließlich als Ausdruck des Satzes von der Erhaltung der Energie die erste Grundgleichung

$$(I) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \left( \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} \right) + 8\pi E.$$

Diese Gleichung enthält noch keinerlei Beziehung zur Absorption und Emission des Mediums  $M$ . Um eine solche Beziehung zu gewinnen, betrachten wir die Strahlung eines bestimmten Spektralintervalles, die innerhalb eines beliebigen Öffnungskegels  $d\Omega$  fortschreitet. Sei  $s$  die Achse dieses Kegels, so denken wir uns einen unendlich kleinen Kreiszylinder von der Basis  $df$  und der Höhe  $ds$ , dessen Erzeugende parallel  $s$  sind. Fände weder Absorption noch Emission statt,

so würde die Strahlung, welche zur Zeit  $t$  durch die Grundfläche in den Zylinder eindringt, zur Zeit  $t + ds/q$  ihn in unveränderter Intensität wieder verlassen, d. h. dann würde die Differenz

$$(9) \quad 2 \left( \mathfrak{R}_v \left( s + ds, t + \frac{ds}{q} \right) - \mathfrak{R}_v(s, t) \right) df dt d\Omega dv$$

verschwinden. Nun erfährt aber die betrachtete Energiemenge durch Absorption den Verlust

$$\alpha_v ds \cdot 2 \mathfrak{R}_v df dt d\Omega dv$$

und infolge der Temperaturstrahlung und der Wärmeerzeugung den Gewinn

$$2(\epsilon_v + \mathfrak{E}_v) df ds dt d\Omega dv.$$

Der daraus resultierende Überschuß muß der Differenz (9) gleich sein. So ergibt sich die Gleichung

$$(10) \quad \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial s} + \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial t} = \epsilon_v + \mathfrak{E}_v - \alpha_v \mathfrak{R}_v.$$

Für die Gesamtstrahlung und unter Beschränkung auf stationäre Vorgänge ist diese Gleichung schon von Eddington aufgestellt.<sup>1)</sup>

Die Richtung von  $s$  sei durch die beiden Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  gekennzeichnet; dann bestehen die Beziehungen

$$(11) \quad \begin{cases} dx = ds \cos \vartheta, & dy = ds \sin \vartheta \cos \varphi, \\ dz = ds \sin \vartheta \sin \varphi, \end{cases}$$

und wir erhalten aus (10) und (11) die zweite Grundgleichung

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial y} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial z} \sin \vartheta \sin \varphi \\ + \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial t} = \epsilon_v + \mathfrak{E}_v - \alpha_v \mathfrak{R}_v. \end{cases}$$

In der bisher gewonnenen Form sind die Gleichungen (I) und (II) der Behandlung nicht zugänglich, weil die „Kontinuitätsgleichung“ (I) eine Aussage über die Gesamtstrahlung und die „Bewegungsgleichung“ (II) eine Aussage über die spektral zerlegte Strahlung enthält. Für die weitere Behandlung bieten sich daher zwei Wege: entweder man beschränkt sich auf das Studium der Gesamtstrahlung, d. h. man verzichtet von vornherein auf die Kenntnis der spektralen Zerlegung, oder man sucht die Gleichung (I) „spektral zu zerlegen“, was

1) A. S. Eddington, a. a. O., S. 355.

jedoch nur auf Grund einer neuen, besonderen Annahme möglich ist.

Im ersten Falle ist Gleichung (II) nach  $\nu$  zu integrieren. Man erhält so auf Grund der Definitionen (1), (2) und (3) und unter Einführung eines „mittleren Absorptionskoeffizienten“  $\alpha$  die Gleichung

$$(IIa) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial K}{\partial y} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{\partial K}{\partial z} \sin \vartheta \sin \varphi \\ + \frac{1}{q} \frac{\partial K}{\partial t} = 2(e + E) - \alpha K. \end{aligned} \right.$$

Nunmehr enthalten die Gleichungen (I) und (IIa) als Unbekannte die Größen  $K$ ,  $e$  und  $T$ ; denn  $E$  und  $\alpha$  sind als gegeben anzusehen, und  $U$  und  $S$  sind durch die Beziehungen (8), (5) und (7) auf  $K$  und  $T$  zurückgeführt. Es muß also dann noch eine Beziehung gegeben sein, die etwa die Strahlungsdichte  $u$  mit der absoluten Temperatur verknüpft. Es liegt am nächsten, die Gültigkeit des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes

$$(12) \quad u = n^2 a T^4 \quad \left( n = \text{Brechungskoeffizient von } M, \right. \\ \left. a = 7,28 \cdot 10^{-15} \text{ erg. cm}^{-3} \text{ grad}^{-4} \right),$$

auch für den Fall anisotroper Strahlung vorauszusetzen. Eine solche Annahme wird für das reine Strahlungsproblem — d. h. wenn nur nach  $K$ , nicht auch nach  $T$  gefragt wird — überflüssig, wenn entweder der Zustand stationär, oder die Änderung der thermischen Energie zu vernachlässigen ist. Denn wenn  $\partial U / \partial t$  verschwindet, oder in der aus (8) hervorgehenden Gleichung

$$(13) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + c \varrho \frac{\partial T}{\partial t}$$

das zweite Glied neben dem ersten unberücksichtigt bleiben darf (man vgl. darüber unten S. 43), enthalten die Gleichungen (I) und (IIa) nicht mehr  $T$  explizit.

Sucht man andererseits das Problem vollständig zu lösen, d. h. den Strahlungszustand für jede Schwingungszahl zu bestimmen, so muß man zuvor aus (I) eine Beziehung ableiten, die für jedes  $\nu$  einzeln genommen gilt. Ist der Zustand stationär, so genügt dafür die Annahme, die auch Hilbert seiner Behandlung des isothermen Problems zugrunde gelegt hat, nämlich die Annahme, daß die Energie von jeder Schwingungs-

zahl für sich im stationären Gleichgewicht ist.<sup>1)</sup> Denn unter dieser ausdrücklichen, und physikalisch höchst bedeutsamen Annahme läßt sich die rechte Seite von (I) spektral zerlegen, wenn die linke Seite verschwindet.

Ist aber der Zustand *nicht* stationär, so genügt nicht mehr die Annahme, daß die Kontinuitätsbeziehung für jede Schwingungszahl einzeln genommen gelten soll, sondern es muß des weiteren angenommen werden, daß in Gleichung (13) das zweite Glied der rechten Seite neben dem ersten vernachlässigt werden darf, damit auch  $\partial U / \partial t$ , und damit die linke Seite von (I) spektral zerlegt werden kann. Machen wir die beiden ausgesprochenen Annahmen, so wird aus (I) vermöge (13), (7), (5) und (3)

$$(Ia) \quad \frac{\partial u_v}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \mathfrak{S}_{vx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{vy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{vz}}{\partial z} \right) + 8\pi \mathfrak{E}_v,$$

wo  $\mathfrak{S}_{vx}$ ,  $\mathfrak{S}_{vy}$ ,  $\mathfrak{S}_{vz}$  die  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  analoge Bedeutung haben.

Jetzt enthalten die Gleichungen (Ia) und (II) nur noch  $\mathfrak{R}_v$  und  $\epsilon_v$  als Unbekannte — denn  $u_v$  und  $\mathfrak{S}_v$  gehen nach (4) und (6) aus  $\mathfrak{R}_v$  hervor — und genügen demnach zu ihrer Bestimmung, wenn die erforderlichen Grenzbedingungen gegeben sind.

Nach dem oben (S. 586) ausgeführten fordern wir als Grenzbedingung, daß die Körper  $K_1, K_2, \dots$ , welche das Strahlungsfeld begrenzen, die ihren Temperaturen  $T_1, T_2, \dots$  entsprechende schwarze Strahlung aussenden. Sei also  $\Psi(\nu, T)$  die Strahlungsintensität der schwarzen Strahlung im Vakuum, so muß  $\mathfrak{R}_v$  an jeder Begrenzung  $K_i$  den Wert

$$(14) \quad \mathfrak{R}_{vi} = n^2 \Psi(\nu, T_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

haben, und zwar für alle Richtungen, welche von der Begrenzung in das Strahlungsfeld hineinführen. In den entgegengesetzten Richtungen unterliegt  $\mathfrak{R}_v$  keiner Bedingung.

Ist der Zustand nicht stationär, so müssen die Temperaturen  $T_i$  gegebene Funktionen der Zeit sein, und außerdem muß ein Anfangszustand für das ganze Strahlungsfeld vorgeschrieben sein. Beschränkt man sich auf die Untersuchung der Gesamtstrahlung, so braucht naturgemäß nur das Integral von (14) nach  $\nu$  vorgegeben zu sein.

1) D. Hilbert, Physik. Zeitschr. 14. S. 592. 1913. Axiom 2.



Zur weiteren Behandlung unserer Grundgleichungen (Ia) und (II) setzen wir die Unbekannte  $\mathfrak{R}_v$  in Form einer Reihe an, durch welche sie an jeder Stelle des Raumes als willkürliche Funktion der Richtung dargestellt wird. Wir denken uns also — in Verallgemeinerung des Ansatzes von Eddington —  $\mathfrak{R}_v$  in eine Reihe entwickelt, die nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitet, und deren Koeffizienten noch Funktionen des Ortes, und gegebenen Falles der Zeit, sind. Wir schreiben demgemäß<sup>1)</sup>

$$(15) \quad \mathfrak{R}_v = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^m P_m^{(\mu)} \sin^{\mu} \vartheta (\mathfrak{A}_m^{(\mu)} \cos \mu \varphi + \mathfrak{B}_m^{(\mu)} \sin \mu \varphi).$$

Durch diese Darstellung gewinnen wir zunächst sehr einfache Ausdrücke für die Strahlungsdichte  $u_v$  und für die durch Gleichung (6) definierte Funktion  $\mathfrak{S}_v$ . Um  $u_v$  zu berechnen, muß man nach Gleichung (4) den obigen Ausdruck von  $\mathfrak{R}_v$  mit  $2P_0^{(0)}/q$  multiplizieren (denn  $P_0^{(0)} = 1$ ) und über die Einheitskugel integrieren. Wegen der Orthogonalität der Kugelfunktionen liefert dabei nur das Glied nullter Ordnung einen von Null verschiedenen Wert, und man erhält

$$(16) \quad u_v = \frac{8\pi \mathfrak{A}_0^{(0)}}{q}.$$

Das Anfangsglied der Entwicklung (15) ist also der Strahlungsdichte proportional.

Zur Berechnung von  $\mathfrak{S}_v$  denke man sich zunächst in (6) den  $\cos(\varphi - \varphi_0)$  entwickelt; dadurch entstehen in der eckigen Klammer drei Glieder, die

$$\cos \vartheta, \quad \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \sin \vartheta \sin \varphi$$

proportional sind. Dafür kann man auch schreiben

$$P_1^{(0)}, \quad P_1^{(1)} \sin \vartheta \cos \varphi, \quad P_1^{(1)} \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Setzt man also jetzt den Wert (15) für  $\mathfrak{R}_v$  ein und integriert über die Einheitskugel, so bleiben nur die Glieder erster Ordnung stehen, und man erhält nach Ausführung der Integration

1) Man vergleiche für die folgenden Rechnungen E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. 2. Aufl. Bd. I. Berlin 1878. Die Bezeichnungen sind jedoch gewählt wie bei Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. I., Braunschweig 1910, Abschnitt 13.

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_r(\vartheta_0, \varphi_0) &= \frac{8\pi}{3} (\mathfrak{A}_1^{(0)} \cos \vartheta_0 + \mathfrak{A}_1^{(1)} \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 \\ &\quad + \mathfrak{B}_1^{(1)} \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0). \end{aligned} \right.$$

Durch die Winkel  $\vartheta_0, \varphi_0$  war die Normalenrichtung eines beliebig orientierten Flächenelements bezeichnet; führen wir vorübergehend die Richtungs-cosinus  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  dieser Normalen  $N$  ein, so ist

$$\cos \alpha = \cos \vartheta_0, \quad \cos \beta = \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0, \quad \cos \gamma = \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0.$$

Demnach kann man statt (17) auch schreiben

$$(17a) \quad \mathfrak{S}_r(\vartheta_0, \varphi_0) = \frac{8\pi}{3} (\mathfrak{A}_1^{(0)} \cos \alpha + \mathfrak{A}_1^{(1)} \cos \beta + \mathfrak{B}_1^{(1)} \cos \gamma),$$

und aus dieser Gleichung folgt in bekannter Weise, daß  $\mathfrak{S}_r(\vartheta_0, \varphi_0)$  die Komponente in Richtung von  $N$  eines Vektors ist, dessen Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen

$$(18) \quad \mathfrak{S}_{rx} = \frac{8\pi \mathfrak{A}_1^{(0)}}{3}, \quad \mathfrak{S}_{ry} = \frac{8\pi \mathfrak{A}_1^{(1)}}{3}, \quad \mathfrak{S}_{rz} = \frac{8\pi \mathfrak{B}_1^{(1)}}{3}$$

sind.

Der so definierte Vektor möge „Strahlungsstrom von der Schwingungszahl  $\nu$ “ heißen. Er ist dem Wärmestrom in der Theorie der Wärmeleitung durchaus analog, denn auch dieser stellt — in kinetischer Deutung — den *Überschuß* von Energie dar, der durch die Flächeneinheit in derjenigen Richtung befördert wird, in der dieser Überschuß ein Maximum ist.

Die Tatsache, daß die Größe  $\mathfrak{S}_r(\vartheta_0, \varphi_0)$ , wie sie durch Gleichung (6) definiert wurde, einen Vektor darstellt, ist natürlich unabhängig davon, ob  $\mathfrak{R}_r$  als Kugelfunktionenreihe gegeben gedacht wird oder nicht. Der Beweis läßt sich ohne Benutzung dieser Darstellung ganz in derselben Weise führen, wie in der Regel die Vektornatur des Wärmestromes in der Theorie der Wärmeleitung bewiesen wird. Man braucht in der Tat nur die Kontinuitätsgleichung der Strahlung für ein unendlich kleines Tetraeder hinzuschreiben, das von den Koordinatenebenen und einer beliebig orientierten vierten Ebene gebildet wird, um zu der Gleichung (17a) zu gelangen. Unsere Ableitung liefert aber zugleich eine einfache physikalische Deutung der Koeffizienten erster Ordnung in der Reihe (15), und dieser Zusammenhang wird sich im Folgenden als wichtig erweisen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Beziehungen (16) und (18) ohne irgendwelche Vernachlässigungen

gelten, unter der alleinigen Annahme, daß die Darstellung (15) für  $\mathfrak{R}$  statthaft sei, und das bedeutet physikalisch kaum eine Einschränkung.

Neben (15) werden wir im Folgenden auch eine entsprechende Darstellung für die Gesamtintensität  $K$  gebrauchen. Wir setzen also

$$(19) \quad K = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^m P_m^{(\mu)} \sin^{\mu} \vartheta (A_m^{(\mu)} \cos \mu \varphi + B_m^{(\mu)} \sin \mu \varphi),$$

wo auch die  $A_m^{(\mu)}$  und  $B_m^{(\mu)}$  Funktionen des Ortes und der Zeit sind, die mit den  $\mathfrak{A}_m^{(\mu)}$  und  $\mathfrak{B}_m^{(\mu)}$  gemäß (1), (15) und (19) folgendermaßen zusammenhängen

$$(20) \quad A_m^{(\mu)} = \int_0^{\infty} \mathfrak{A}_m^{(\mu)} d\nu, \quad B_m^{(\mu)} = \int_0^{\infty} \mathfrak{B}_m^{(\mu)} d\nu.$$

Aus (5) und (16) ergibt sich dann

$$(21) \quad u = \frac{8\pi A_0^{(0)}}{q}$$

und ebenso aus (7) und (17a)

$$(22) \quad S(\vartheta_0, \varphi_0) = \frac{8\pi}{3} (A_1^{(0)} \cos \alpha + A_1^{(1)} \cos \beta + B_1^{(1)} \cos \gamma).$$

Es stellen also auch die Größen

$$(23) \quad S_x = \frac{8\pi A_1^{(0)}}{3}, \quad S_y = \frac{8\pi A_1^{(1)}}{3}, \quad S_z = \frac{8\pi B_1^{(1)}}{3}$$

Komponenten eines Vektors, des „Strahlungsstromes“, dar.

Zur Behandlung der Gleichung (II) muß zuerst für  $\mathfrak{R}$  die Reihe (15) eingesetzt werden; dann muß man die linke Seite in eine Kugelfunktionenreihe entwickeln und die Koeffizienten gleicher Glieder der linken und rechten Seite einander gleich setzen. Auf diese Weise gelangt man zu einem System von partiellen Differentialgleichungen für die Koeffizienten  $\mathfrak{A}_m^{(\mu)}$  und  $\mathfrak{B}_m^{(\mu)}$ , die ja noch Funktionen von  $x, y, z$  und  $t$  sind.

Die Entwicklung der drei ersten Glieder der linken Seite in Kugelfunktionenreihen läßt sich auf Grund bekannter Eigenschaften der Kugelfunktionen durchführen. Wir teilen hier nur das Ergebnis der Rechnung mit.

Setzt man

$$(24) \quad \frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x} \cos \vartheta = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^m P_m^{(\mu)} \sin^{\mu} \vartheta (\mathfrak{U}_m^{(\mu)} \cos \mu \varphi + \mathfrak{D}_m^{(\mu)} \sin \mu \varphi),$$

so werden die Koeffizienten

$$(24a) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_m^{(\mu)} = \frac{m-\mu}{2m-1} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m-1}^{(\mu)}}{\partial x} + \frac{m+\mu+1}{2m+3} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m+1}^{(\mu)}}{\partial x}, \\ \mathfrak{D}_m^{(\mu)} = \frac{m-\mu}{2m-1} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m-1}^{(\mu)}}{\partial x} + \frac{m+\mu+1}{2m+3} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m+1}^{(\mu)}}{\partial x}. \end{cases}$$

Entsprechend erhält man

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} \sin \vartheta \cos \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^m P_m^{(\mu)} \sin^{\mu} \vartheta \\ \quad (\mathfrak{U}_m^{(\mu)} \cos \mu \varphi + \mathfrak{F}_m^{(\mu)} \sin \mu \varphi) \end{cases}$$

mit der Bedeutung

$$(25a) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_m^{(\mu)} = \frac{(m+\mu+1)(m+\mu+2)}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m+1}^{(\mu+1)}}{\partial y} \\ \quad - \frac{(m-\mu-1)(m-\mu)}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m-1}^{(\mu+1)}}{\partial y} \\ \quad + \frac{1}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m-1}^{(\mu-1)}}{\partial y} - \frac{1}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m+1}^{(\mu-1)}}{\partial y}, \quad \mu \neq 1, \\ \mathfrak{F}_m^{(\mu)} = \frac{(m+\mu+1)(m+\mu+2)}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m+1}^{(\mu+1)}}{\partial y} \\ \quad - \frac{(m-\mu-1)(m-\mu)}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m-1}^{(\mu+1)}}{\partial y} \\ \quad + \frac{1}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m-1}^{(\mu-1)}}{\partial y} - \frac{1}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m+1}^{(\mu-1)}}{\partial y}, \quad \mu \neq 1, \end{cases}$$

$$(25b) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_m^{(1)} = \frac{(m+2)(m+3)}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m+1}^{(2)}}{\partial y} - \frac{(m-2)(m-1)}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m-1}^{(2)}}{\partial y} \\ \quad + \frac{1}{2m-1} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m-1}^{(0)}}{\partial y} - \frac{1}{2m+3} \frac{\partial \mathfrak{U}_{m+1}^{(0)}}{\partial y}, \\ \mathfrak{F}_m^{(1)} = \frac{(m+2)(m+3)}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m+1}^{(2)}}{\partial y} - \frac{(m-2)(m-1)}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m-1}^{(2)}}{\partial y} \\ \quad + \frac{1}{2m-1} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m-1}^{(0)}}{\partial y} - \frac{1}{2m+3} \frac{\partial \mathfrak{D}_{m+1}^{(0)}}{\partial y}; \end{cases}$$

und endlich

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial z} \sin \vartheta \sin \varphi &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=0} P_m^{(\mu)} \sin^\mu \vartheta \\ &(\mathfrak{G}_m^{(\mu)} \cos \mu \varphi + \mathfrak{H}_m^{(\mu)} \sin \mu \varphi) \end{aligned} \right.$$

mit der Bedeutung

$$(26a) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_m^{(\mu)} &= \frac{(m+\mu+1)(m+\mu+2)}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{B}_{m+1}^{(\mu+1)}}{\partial z} \\ &\quad - \frac{(m-\mu-1)(m-\mu)}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{B}_{m-1}^{(\mu+1)}}{\partial z} \\ &\quad - \frac{1}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{B}_{m-1}^{(\mu-1)}}{\partial z} + \frac{1}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{B}_{m+1}^{(\mu-1)}}{\partial z}, \quad \mu \neq 1, \end{aligned} \right.$$

$$\mathfrak{H}_m^{(\mu)} = - \frac{(m+\mu+1)(m+\mu+2)}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{A}_{m+1}^{(\mu+1)}}{\partial z} \\ + \frac{(m-\mu-1)(m-\mu)}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{A}_{m-1}^{(\mu+1)}}{\partial z} \\ + \frac{1}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{A}_{m-1}^{(\mu-1)}}{\partial z} - \frac{1}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{A}_{m+1}^{(\mu-1)}}{\partial z}, \quad \mu \neq 1,$$

$$(26b) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_m^{(1)} &= \frac{(m+2)(m+3)}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{B}_{m+1}^{(2)}}{\partial z} - \frac{(m-2)(m-1)}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{B}_{m-1}^{(2)}}{\partial z} \\ &\quad - \frac{1}{2m-1} \frac{\partial \mathfrak{B}_{m-1}^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{2m+3} \frac{\partial \mathfrak{B}_{m+1}^{(0)}}{\partial z}, \\ \mathfrak{H}_m^{(1)} &= - \frac{(m+2)(m+3)}{2(2m+3)} \frac{\partial \mathfrak{A}_{m+1}^{(2)}}{\partial z} + \frac{(m-2)(m-1)}{2(2m-1)} \frac{\partial \mathfrak{A}_{m-1}^{(2)}}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{2m-1} \frac{\partial \mathfrak{A}_{m-1}^{(0)}}{\partial z} - \frac{1}{2m+3} \frac{\partial \mathfrak{A}_{m+1}^{(0)}}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Ganz analoge Formeln gelten für die Entwicklung der linken Seite von (IIa), wenn man von (19) an Stelle von (15) ausgeht. Unsere Bezeichnungen sind so gewählt, daß man von den spektral zerlegten Gleichungen zu denen für die Gesamtstrahlung übergehen kann (allerdings nur unter Vernachlässigung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von (13) bei nicht stationären Problemen!), wenn man

$\mathfrak{R}_\nu, u_\nu, \mathfrak{S}_\nu, \alpha_\nu, \varepsilon_\nu, \mathfrak{E}_\nu, \mathfrak{A}_m^{(\mu)}, \mathfrak{B}_m^{(\mu)}$   
ersetzt durch

$$\frac{K}{2}, u, S, \alpha, \varepsilon, E, A_m^{(\mu)}, B_m^{(\mu)}.$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  bei  $K$  ist beibehalten, damit die Übereinstimmung mit den Planckschen Bezeichnungen gewahrt bleibt.

Im Folgenden behandeln wir zunächst den stationären Fall, und dann im dritten Paragraphen, unter weitgehenderer Einschränkung, zeitlich veränderliche Zustände.

## § 2. Stationäre Zustände.

Hängt der Zustand des Strahlungsfeldes nicht von der Zeit ab, so lauten die Gleichungen für die Strahlung von jeder Schwingungszahl

$$(Ib) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 8\pi \mathfrak{E},$$

$$(IIb) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{\partial \mathfrak{R}_z}{\partial z} \sin \vartheta \sin \varphi \\ = \epsilon_v + \mathfrak{E}_v - \alpha_v \mathfrak{R}_v. \end{aligned} \right.$$

Unter Benutzung des Ansatzes (15) kann man (vgl. die Formel (18)) statt (Ib) auch schreiben

$$(27) \quad \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_1^{(2)}}{\partial z} \right) = \mathfrak{E}_v.$$

Der „Strahlungsstrom von der Schwingungszahl  $\nu$ “<sup>1)</sup> ist also ein Vektor, dessen räumliche Divergenz gegeben ist, und sein Feld wäre vollständig berechenbar, wenn auch noch seine Normalkomponente an allen Begrenzungen bekannt wäre. Das ist aber nicht der Fall; denn durch die Grenzbedingungen ist nur vorgeschrieben, welche Energiemenge durch jedes Element der Begrenzung in der Zeiteinheit in das Feld eintritt, nicht aber der Überschuß dieser Energiemenge über diejenige, welche in derselben Zeit das Feld durch dasselbe Flächenelement verläßt, d. h. absorbiert wird. Dieser Überschuß bildet aber erst die Normalkomponente des Strahlungsstromes.

Sein Feld ist also durch die Gleichung (Ib) allein nicht völlig bestimmt; trotzdem läßt sich seine Berechnung bis zu einem gewissen Grade mit dem elektrostatischen Problem

1) Wir werden im Folgenden den Zusatz „von der Schwingungszahl  $\nu$ “ dort weglassen, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen ist.

identifizieren. Führen wir nämlich ein „Strahlungspotential  $\Phi_v$ “ ein und setzen demgemäß

$$(28) \quad \mathfrak{S}_{vx} = -\frac{\partial \Phi_v}{\partial x}, \quad \mathfrak{S}_{vy} = -\frac{\partial \Phi_v}{\partial y}, \quad \mathfrak{S}_{vz} = -\frac{\partial \Phi_v}{\partial z},$$

so sind die Oberflächen  $O_i$  der Körper  $K_i$  notwendiger Weise Äquipotentialflächen  $\Phi_v = \text{const.}$ , denn zwischen Punkten ein und derselben Oberfläche fließt kein Strahlungsstrom. Der Zusammenhang zwischen  $\Phi_v$  und den Strahlungsvariablen, d. h. also  $u_v$ ,  $\mathfrak{E}_v$  usw., ist aber vorläufig noch nicht bekannt.

Der Vektor  $\mathfrak{S}_v$  bestimmt sich also auf Grund der folgenden „elektrostatischen“ Aufgabe: es soll das Feld eines Potentialvektors berechnet werden, dessen räumliche Divergenz bekannt ist und dessen Potential an gegebenen Flächen  $O_i$  konstante Werte  $\Phi_{vi}$  annimmt. Wären die  $\Phi_{vi}$  bekannte Zahlenwerte, so wäre die Aufgabe eindeutig bestimmt; in unserem Falle also, wo von den  $\Phi_{vi}$  nur bekannt ist, daß sie konstant sind, enthält die Lösung für  $\Phi_v$  so viele Konstanten (davon eine additiv), wie Oberflächen  $O_i$  vorhanden sind. Erstreckt sich das Feld in allen oder einigen Richtungen ins Unendliche, so ist eine Kugel von sehr großem Radius ganz oder teilweise als eine der Grenzflächen mitzuzählen.

Soweit läßt sich die Berechnung des Vektors  $\mathfrak{S}_v$  auf Grund der Kontinuitätsgleichung allein durchführen. Die Bestimmung der Konstanten und der weiteren Einzelheiten des Strahlungszustandes, soweit sie nicht in der Kenntnis des Vektors  $\mathfrak{S}_v$  enthalten sind, erfolgt auf Grund der Gleichung (IIb).

Multipliziert man (IIb) mit dem doppelten Element des räumlichen Öffnungswinkels  $2d\Omega$  und integriert über die Einheitskugel, so erhält man unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (6)

$$(IIc) \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_{vx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{vy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_{vz}}{\partial z} = 8\pi(\epsilon_v + \mathfrak{E}_v) - 2\alpha_v \int \mathfrak{R}_v d\Omega.$$

Der Vergleich mit (Ib) liefert auf Grund von (4) die wichtige Folgerung

$$(29) \quad \epsilon_v = \frac{\alpha_v q u_v}{8\pi}.$$

Diese Beziehung führt den Emissionskoeffizienten  $\epsilon_v$  auf die Strahlungsdichte zurück und stellt die Verallgemeinerung des bekannten Satzes<sup>1)</sup>

1) M. Planck, a. a. O. S. 27.

$$(30) \quad \varepsilon_r = a_r \mathfrak{B}_r$$

auf den Fall anisotroper, stationärer Strahlung dar. Während im isothermen Gleichgewicht die Form (30) völlig gleichwertig mit (29) ist, gilt im anisotropen Strahlungsfelde nur die Form (29). Die Ableitung setzt, wie wir gesehen haben, nur die Gültigkeit der Grundgleichungen (Ib) und (IIb) voraus.

Zur weiteren Behandlung der Gleichung (IIb) führen wir, wie schon oben (S. 595) angedeutet, die Ausdrücke (15) und (24) bis (26) ein und setzen die Koeffizienten gleicher Kugelfunktionsglieder einander gleich. Die von  $\vartheta$  und  $\varphi$  freien Glieder ergeben dabei

$$(31) \quad \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1^{(1)}}{\partial z} \right) = \varepsilon_r + \mathfrak{E}_r - a_r \mathfrak{A}_0^{(0)}.$$

Diese Gleichung liefert uns nichts Neues; der Vergleich mit (27) führt zu

$$(32) \quad \varepsilon_r = a_r \mathfrak{A}_0^{(0)},$$

und das ist auf Grund von (16) gleichbedeutend mit (29).

Wir wenden uns nunmehr denjenigen Gleichungen zu, die aus den Koeffizienten der Kugelfunktionen erster und höherer Ordnung hervorgehen.

Verstehen wir unter  $G_n$  Glieder, die aus Koeffizienten  $\mathfrak{A}_n^{(\mu)}$ ,  $\mathfrak{B}_n^{(\mu)}$  mit unterem Index  $n$  und konstanten Faktoren zusammengesetzt sind, so ist die allgemeine Form der entstehenden Differentialgleichungen wie folgt

$$(33) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (G_{n-1} + G_{n+1}) = -a_r G_n, \quad n \neq 0.$$

Dabei soll die erste Klammer andeuten, daß die Glieder in der zweiten Klammer einmalig nach  $x$ ,  $y$  oder  $z$  differenziert sind. Da demnach in jeder Gleichung Koeffizienten von drei aufeinander folgenden Ordnungen miteinander verknüpft sind, ist es nicht möglich, diese Koeffizienten der Reihe nach — beim Koeffizienten  $\mathfrak{A}_0^{(0)}$  beginnend — zu bestimmen. Es muß vielmehr zu Beginn der Rechnung festgestellt werden, bis zu welcher Ordnung die Reihe (15) berechnet werden soll; dann erhält man, unter Vernachlässigung der höheren Glieder, ein ausreichendes Gleichungssystem für die Koeffizienten bis zu der geforderten Ordnung. Mit anderen Worten: der Wert aller Koeffizienten, auch der Anfangsglieder  $\mathfrak{A}_0^{(0)}$ ,  $\mathfrak{A}_1^{(0)}$ ,  $\mathfrak{A}_1^{(1)}$ ,  $\mathfrak{B}_1^{(1)}$  ... hängt davon ab, bis zu welchen Gliedern die An-



näherung getrieben wird. Das ist im Grunde bei der physikalischen Bedeutung dieser Anfangsglieder nicht verwunderlich.

a) *Starke Absorption.* Wir werden uns nun zunächst auf die Glieder nullter und erster Ordnung beschränken, und müssen uns darum zuvor die Frage vorlegen, unter welchen physikalischen Bedingungen die Reihe (15) als so schnell konvergent angesehen werden darf, daß man sie schon nach den vier ersten Gliedern abbrechen darf. Das wird offenbar dann der Fall sein, wenn man den Strahlungszustand im ganzen Felde, oder doch wenigstens in seinen überwiegenden Teilen als *nahezu isotrop* voraussetzt.

Die Anisotropie des Feldes hat primär ihre Ursache darin, daß von den verschieden temperierten Grenzflächen Strahlung verschiedener Intensität ausgeht. Ist die Absorption durch das Medium verschwindend gering, so erstreckt sich diese primäre Anisotropie durch das ganze Feld, und im absoluten Vakuum ist im allgemeinen  $\mathfrak{R}_v$  eine unstetige Funktion der Richtung (vgl. unten S. 617), so daß dann eine sehr große Zahl von Gliedern der Reihe (15) erforderlich wäre, um den Zustand mit guter Annäherung darzustellen. Je stärker die Absorption aber ist, desto mehr wird die Anisotropie aufgehoben, denn jede absorbierte Energiemenge wird bei der Wiederemission gleichmäßig über alle Richtungen verteilt. Bei sehr starker Absorption wird schließlich überall, außer in unmittelbarer Nachbarschaft der schwarzen Wände, der Zustand nahezu isotrop. Die Gebiete, in denen sich der Ausgleich der anisotropen Wandstrahlung in die nahezu isotrope Raumstrahlung vollzieht, ziehen sich mit zunehmendem Absorptionskoeffizienten auf immer dünnere, den Wänden anliegende Schichten zusammen, und der Grenzfall starker Absorption ist dadurch charakterisiert, daß die Strecke, über welche eine nahezu vollständige Absorption der Strahlung erfolgt, klein sein muß gegen die mittleren linearen Abmessungen des Strahlungsfeldes.

Diese Folgerungen, die wir hier aus einer physikalischen Betrachtung ziehen, müssen natürlich auch in unseren Gleichungen enthalten sein. Das wird sich in der Tat im Folgenden bei der Durchführung eines Beispiels bestätigen. An dieser Stelle sollte nur plausibel gemacht werden, daß man sich auf um so weniger Glieder der Reihe (15) beschränken kann, je größer der Absorptionskoeffizient ist. Dasselbe läßt übrigens auch die Form der Gleichungen (33) erkennen; denn streicht

man in jeder dieser Gleichungen die Glieder höchster Ordnung  $G_{n+1}$ , so ergeben sich die Glieder von der Ordnung  $n$  aus denen von der Ordnung  $n - 1$  durch einmalige Differenziation und Division mit  $\alpha_r$ , so daß die Glieder mit steigender Ordnung sehr schnell abnehmen müssen, wenn  $\alpha_r$  hinreichend groß ist. Durch die Glieder  $G_{n+1}$  komplizieren sich allerdings die Verhältnisse.

Wenden wir uns nunmehr dem Grenzfall sehr starker Absorption zu und brechen demgemäß die Reihe (15) schon nach den Gliedern erster Ordnung ab, so erhält man die drei Gleichungen

$$(34) \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial x} = -\alpha_r \mathfrak{A}_1^{(0)}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial y} = -\alpha_r \mathfrak{A}_1^{(1)}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial z} = -\alpha_r \mathfrak{B}_1^{(1)}.$$

Damit ist für den betrachteten Sonderfall der Strahlungsstrom auf die Strahlungsdichte zurückgeführt. Denn die Gleichungen (34) lassen sich wegen (16) und (18) unter Einführung der Größe

$$(35) \quad \lambda_r = \frac{q}{3\alpha_r}$$

auch in der folgenden Form schreiben

$$(36) \quad \mathfrak{S}_{rx} = -\lambda_r \frac{\partial u_r}{\partial x}, \quad \mathfrak{S}_{ry} = -\lambda_r \frac{\partial u_r}{\partial y}, \quad \mathfrak{S}_{rz} = -\lambda_r \frac{\partial u_r}{\partial z}.$$

Also gilt der folgende Satz: Im Grenzfall starker Absorption ist der Strahlungsstrom von der Schwingungszahl  $\nu$  dem Gefälle der Strahlungsdichte dieser Schwingungszahl proportional. Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda_r$  ist von der Schwingungszahl abhängig und wird durch den Ausdruck (35) gegeben. Die Beziehung (34), ebenso wie die früheren Gleichungen (16) und (18), hat schon Eddington für den von ihm untersuchten Spezialfall und unter Beschränkung auf die Gesamtstrahlung abgeleitet.<sup>1)</sup>

Bei starker Absorption liegen also ganz ähnliche Verhältnisse vor wie bei der Wärmeleitung; die Gleichungen (36) haben genau diejenige Form, die man ihnen geben würde, wenn man in Analogie mit der klassischen Theorie der Wärmeleitung rein phänomenologisch vorgehen wollte. Allerdings liefert unsere Ableitung zugleich den Wert des Koeffizienten  $\lambda_r$ , ausgedrückt in bekannten Konstanten.

1) A. S. Eddington, a. a. O. Formeln (10), (12) und (13).

Debye<sup>1)</sup> hat in seiner Theorie der Wärmeleitfähigkeit von Isolatoren die Begriffsbildungen der Strahlungstheorie auf die Wärmeleitung übertragen, indem er eine „elastische Strahlung“ an Stelle der Wärmestrahlung setzt. Dabei wird das Medium durch eine freie Weglänge — das Reziproke des Absorptionskoeffizienten — charakterisiert. Soweit in der Debyeschen Theorie die freie Weglänge als bekannt vorausgesetzt wird (a. a. O. § 8), lassen sich unsere Rechnungen unmittelbar anwenden. Beziehen wir die Gleichungen (35) und (36) auf die gesamte elastische Strahlung (und unterdrücken demgemäß den Index  $\nu$ ), setzen wir ferner

$$\frac{\partial u}{\partial x_l} = \frac{du}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_l} = c \varrho \frac{\partial T}{\partial x_l}, \quad \left( l = 1, 2, 3 \right. \\ \left. x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z \right),$$

so erhalten wir für das Wärmeleitvermögen  $\kappa$

$$\kappa = \frac{c \varrho q}{3 \alpha},$$

während Debye (a. a. O. S. 50)  $\kappa = c \varrho q / 4 \alpha$  errechnet. Unser Wert ist der genauere, weil die Anisotropie der Strahlung berücksichtigt ist; außerdem ist — im Gegensatz zur Debyeschen Rechnung — keine spezielle Annahme über die Temperaturverteilung zugrunde gelegt.

Der Vergleich von (36) mit (28) lehrt, daß das früher eingeführte Strahlungspotential bei starker Absorption in folgendem einfachen Zusammenhange mit der Strahlungsdichte steht.

$$(37) \quad \Phi_\nu = \lambda_\nu u_\nu.$$

Nunmehr ist die Aufgabe, aus (36) und (Ib)  $u_\nu$  und  $\mathfrak{E}_\nu$  (und damit die vier ersten Koeffizienten der Reihe (15)) zu berechnen, eindeutig bestimmt, wenn wir als Grenzbedingung hinzunehmen, daß die Strahlungsdichte  $u_\nu$  an jeder Fläche  $O_i$  denjenigen Wert annehmen soll, welcher in der schwarzen Hohlraumstrahlung bei der Temperatur  $T_i$  im Medium  $M$  herrschen würde.

Über diese Form der Grenzbedingung sind noch einige Worte zu sagen. Sie wäre völlig korrekt, wenn wir unser Problem ursprünglich so formuliert hätten, daß im Medium  $M$

1) Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1914. S. 43ff.

innerhalb gewisser geschlossener Flächen  $O_i$  die konstanten Temperaturen  $T_i$  herrschen sollen. Wird aber, wie wir es getan haben, gefordert, daß die Flächen schwarze Flächen von gegebenen Temperaturen sind, so folgt daraus im allgemeinen keineswegs, daß die Strahlungsdichte an diesen Flächen gleich sei der Dichte der schwarzen Strahlung von der betreffenden Temperatur. An einer überall konvexen schwarzen Fläche, welche im Vakuum gegen eine Hülle von der Temperatur 0 ausstrahlt, herrscht nur die Hälfte der Dichte der schwarzen Strahlung, weil in den auf die Fläche zuführenden Richtungen die Strahlungsintensität Null ist. Bei schwacher Absorption sind die Verhältnisse davon nur wenig verschieden (vgl. unten S. 618ff.), aber mit zunehmender Absorption steigt die Strahlungsdichte, bis sie im Grenzfalle sehr großer Absorption den Wert der Hohlraumstrahlung erreicht. Das ist physikalisch leicht einzusehen, weil die Absorption und Wiederemission eine Rückstrahlung gegen die schwarze Wand bewirkt, die mit steigender Absorption zunimmt; es wird im übrigen durch Rechnung an einem Beispiel belegt werden.

Der Grenzfall extrem starker Absorption ist, wie schon oben ausgeführt wurde, dadurch gekennzeichnet, daß von den Einzelheiten des Strahlungsgleichgewichts in unmittelbarer Nachbarschaft der begrenzenden Flächen abgesehen werden kann, weil die von den Wänden emittierte Strahlung schon in dünnen Schichten absorbiert und nahezu gleichmäßig über alle Richtungen verteilt wird. Bei starker Absorption braucht also nicht einmal die vereinfachende Annahme gemacht zu werden, daß die Wände schwarz sein sollen, denn auch der reflektierte Teil der Strahlung würde sich nicht über jene dünnen Schichten hinaus bemerkbar machen.

Es ist also durchaus sinngemäß, für den jetzt untersuchten Grenzfall die Grenzbedingung so zu formulieren, wie es oben geschehen ist; im übrigen würden die Gleichungen, bei Beschränkung auf die Glieder nullter und erster Ordnung, gar nicht gestatten, Grenzbedingungen anderer Form zu genügen — es sei denn, daß der Strahlungsstrom an den Grenzflächen vorgeschrieben würde.

Wird nach der Gesamtstrahlung — ohne Rücksicht auf die spektrale Zerlegung — gefragt, so hat man nur nach

der früher gegebenen Regel (S. 597) zu verfahren. Wir wollen in diesem Falle  $E = 0$  setzen und die Gültigkeit des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes (Gleichung (12)) voraussetzen. Dann ergibt sich aus (29)

$$(38) \quad \varepsilon = \frac{\alpha q n^2 \alpha T^4}{8\pi}$$

und aus (1b) und (36)

$$(39) \quad \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = 0,$$

bzw.

$$(40) \quad S_x = -\sigma \frac{\partial T^4}{\partial x}, \quad S_y = -\sigma \frac{\partial T^4}{\partial y}, \quad S_z = -\sigma \frac{\partial T^4}{\partial z}$$

mit der Bedeutung

$$(41) \quad \sigma = n^2 a \lambda, \quad \lambda = \frac{q}{3\alpha}.$$

In dieser Form ist die Analogie mit der Theorie der Wärmeleitung besonders auffallend:  $T^4$  tritt an die Stelle von  $T$  und  $\sigma$  an die Stelle des Wärmeleitvermögens.

Nachdem der Grenzfall sehr starker Absorption erledigt ist, wollen wir die Approximation um eine Stufe weitertreiben und die fünf Glieder zweiter Ordnung der Reihe (15) hinzunehmen.

Die Gleichungen des Problems werden dann

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial x} + \frac{2}{5} \frac{\partial \mathfrak{A}_2^{(0)}}{\partial x} + \frac{3}{5} \frac{\partial \mathfrak{A}_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{3}{5} \frac{\partial \mathfrak{B}_2^{(1)}}{\partial z} \\ & \hspace{15em} = -\alpha_r \mathfrak{A}_1^{(0)}, \\ & \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial y} + \frac{3}{5} \frac{\partial \mathfrak{A}_2^{(0)}}{\partial x} + \frac{6}{5} \frac{\partial \mathfrak{A}_2^{(0)}}{\partial y} - \frac{1}{5} \frac{\partial \mathfrak{A}_2^{(0)}}{\partial y} + \frac{6}{5} \frac{\partial \mathfrak{B}_2^{(2)}}{\partial x} \\ & \hspace{15em} = -\alpha_r \mathfrak{A}_1^{(1)}, \\ & \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{3}{5} \frac{\partial \mathfrak{B}_2^{(1)}}{\partial x} - \frac{6}{5} \frac{\partial \mathfrak{A}_2^{(0)}}{\partial z} - \frac{1}{5} \frac{\partial \mathfrak{A}_2^{(0)}}{\partial x} + \frac{6}{5} \frac{\partial \mathfrak{B}_2^{(2)}}{\partial y} \\ & \hspace{15em} = -\alpha_r \mathfrak{B}_1^{(1)} \end{aligned} \right.$$

und

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(0)}}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(1)}}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial \mathfrak{B}_1^{(1)}}{\partial z} = -\alpha_\nu \mathfrak{A}_2^{(0)}, \\ \frac{1}{3} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(0)}}{\partial y} = -\alpha_\nu \mathfrak{A}_2^{(1)}, \\ \frac{1}{3} \frac{\partial \mathfrak{B}_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(0)}}{\partial z} = -\alpha_\nu \mathfrak{B}_2^{(1)}, \\ \frac{1}{6} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(1)}}{\partial y} - \frac{1}{6} \frac{\partial \mathfrak{B}_1^{(1)}}{\partial z} = -\alpha_\nu \mathfrak{A}_2^{(2)}, \\ \frac{1}{6} \frac{\partial \mathfrak{B}_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{6} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(1)}}{\partial z} = -\alpha_\nu \mathfrak{B}_2^{(2)}. \end{array} \right.$$

Diese acht Gleichungen bestimmen, zusammen mit der Gleichung (27), die neun Unbekannten  $\mathfrak{A}_0^{(0)}$  bis  $\mathfrak{B}_2^{(2)}$ . In den Gleichungen (43) sind die Glieder mit unterem Index 3 bereits vernachlässigt, und die Gleichungen (42) gehen in den früheren Ansatz (34) über, wenn man die Koeffizienten mit unterem Index 2 streicht.

Vermöge (18), (28) und (43) lassen sich die acht Unbekannten  $\mathfrak{A}_1^{(0)}$  bis  $\mathfrak{B}_2^{(2)}$  durch das Strahlungspotential  $\Phi_\nu$  ausdrücken. Führt man das aus, ersetzt man ferner  $\mathfrak{A}_0^{(0)}$  gemäß (16) durch  $u_\nu$ , so nehmen die drei Gleichungen (42) die Form an

$$(44) \quad \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \Phi_\nu - \frac{4}{15 \alpha_\nu^2} \nabla^2 \Phi_\nu - \frac{q}{3 \alpha_\nu} u_\nu \right] = 0, \quad l = 1, 2, 3; \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z.$$

Da nach (1b) und (28)

$$(45) \quad \nabla^2 \Phi_\nu = -8\pi \mathfrak{E}_\nu$$

ist, ergibt (44) integriert

$$(46) \quad \Phi_\nu = \lambda_\nu u_\nu - \frac{32\pi}{15 \alpha_\nu^2} \mathfrak{E}_\nu.$$

Hier ist  $\lambda_\nu$  durch (35) gegeben, und die Integrationskonstante ist in die additive Konstante einbezogen, die  $\Phi_\nu$  anhängt. Damit ist wiederum der Zusammenhang zwischen dem Strahlungspotential und den für den Strahlungszustand charakteristischen Größen hergestellt. Der Ausdruck (46) unterscheidet sich von dem früheren Wert (37) durch das zweite Glied auf der rechten Seite, das bei großen Werten von  $\alpha_\nu$  gegen das erste Glied verschwindet.

Die Grenzbedingungen müssen bei der jetzt behandelten zweiten Näherung ebenso angesetzt werden, wie bei der ersten Näherung. Das Strahlungspotential ist nach früheren Ausführungen (S. 599) allgemein, d. h. für jeden Grad der Approximation, bekannt bis auf so viele Konstanten, wie Grenzflächen vorhanden sind. Diese Konstanten bestimmen sich auf Grund der Gleichung (46), wenn  $\mathfrak{E}_v$  gegeben und  $u_v$  an den Grenzflächen als bekannt angesehen wird. Damit ist das Problem allgemein in zweiter Annäherung gelöst, falls das entsprechende elektrostatische Problem behandelt werden kann; denn  $\mathfrak{A}_1^{(0)}$  bis  $\mathfrak{B}_2^{(2)}$  ergeben sich aus den ersten und zweiten Differentialquotienten von  $\Phi_v$ ,  $u_v$  und damit  $\mathfrak{A}_0^{(0)}$  folgen aus (46) und  $\varepsilon_v$  schließlich aus (29).

Die allgemeine Behandlung weiterer Näherungen würde weitläufige Rechnungen erfordern und möge darum unterbleiben. Die Hauptschwierigkeit besteht in der Berücksichtigung der Grenzbedingungen, weil man sich nur für den Fall starker Absorption mit der Annahme begnügen darf, daß  $u_v$  an den Begrenzungen gegeben sei. Soll aber  $\mathfrak{R}_v$  selbst den oben (S. 10) aufgestellten Grenzbedingungen genügen, so beruht die Schwierigkeit darin, daß  $\mathfrak{R}_v$  an jeder Oberfläche  $O_i$  nur in denjenigen Richtungen vorgeschrieben ist, welche von der Oberfläche ins Feld hinein führen. Der Wert in den entgegengesetzten Richtungen bestimmt sich aus dem Problem selbst.

Ein Verfahren, das im Prinzip gestattet, den Grenzbedingungen mit beliebiger Näherung zu genügen, läßt sich angeben. Wir nehmen an, daß es gelungen sei, das System von Differentialgleichungen vom Typus (33) bis einschließlich der Ordnung  $p$  zu integrieren. Dann enthält die Lösung für  $\mathfrak{R}_v$  eine Anzahl von Konstanten und willkürlichen Funktionen der Koordinaten  $x, y, z$ .

Das Strahlungsfeld sei von  $N$  Flächen  $O_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) begrenzt; erstreckt es sich in allen oder einigen Richtungen ins Unendliche, so ist eine große Kugel ganz oder teilweise als eine der Flächen  $O_i$  mitzuzählen. Jede im Strahlungsfeld verlaufende, mit einem Richtungssinn ausgezeichnete Gerade beginnt auf einer der  $N$  Flächen  $O_i$ . Daher läßt sich  $\mathfrak{R}_v$  in eindeutiger Weise in  $N$  Funktionen  $\mathfrak{R}^i$  zerlegen, die folgendermaßen definiert sind: in jedem Punkte des Feldes stimmt  $\mathfrak{R}^i$  in allen den Richtungen mit  $\mathfrak{R}_v$  überein, die auf der

$i$ -ten Fläche  $O$  beginnen, und verschwindet in allen anderen Richtungen. Nach bekannten Regeln lassen sich die Funktionen  $\mathfrak{R}_r^i$  in der Form von Kugelfunktionenreihen aus dem gefundenen (mit unbekannten Konstanten und Funktionen behafteten) Werte von  $\mathfrak{R}_r$  gewinnen.

Ebenso läßt sich aus jedem der gegebenen Werte  $\mathfrak{R}_r^i$  (vgl. S. 592) in Form einer Kugelfunktionenreihe eine Funktion  $\mathfrak{R}_{r,i}^*$  ableiten, die auf der Fläche  $O_i$  in allen von  $O_i$  ins Feld führenden Richtungen mit  $\mathfrak{R}_{r,i}$  übereinstimmt und in den entgegengesetzten Richtungen verschwindet.

Die Grenzbedingungen erfordern, daß an jeder Fläche  $O_i$  die Funktionen  $\mathfrak{R}_r^i$  und  $\mathfrak{R}_{r,i}^*$  übereinstimmen. Aus dieser Forderung lassen sich Bedingungsgleichungen in beliebiger Zahl ableiten, und daraus die unbekannten Konstanten und Funktionen ermitteln. Dabei wird im allgemeinen der Fall eintreten, daß man den Grenzbedingungen nur bis zu einer Ordnung  $r$  zu genügen vermag, die niedriger ist als  $p$ . Wird also  $r$  vorgeschrieben, so muß von vornherein  $p$  entsprechend größer gewählt werden.

Der Gang der Rechnung bei dem angedeuteten Verfahren wird sich am deutlichsten aus einem Beispiel ergeben. Wir wählen dafür den einfachsten Fall: das eindimensionale Problem.

Es seien zwei parallele, ideal schwarze ebene Wände  $E_1$  und  $E_2$  gegeben, die sich auf den verschiedenen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  befinden und einander zustrahlen. Ihr senkrechter Abstand betrage  $d$  cm, und es sei  $T_1 > T_2$ . Es wird nach dem Strahlungszustand in dem Raum zwischen den beiden Ebenen gefragt, wenn keine Energieerzeugung stattfindet, d. h.  $\mathfrak{E}_v = 0$  ist.

Wir legen die  $x$ -Achse senkrecht zu den beiden Ebenen und messen die  $x$ -Koordinate von der Ebene  $E_1$  aus. Der Zustand hängt dann nicht von  $y$  und  $z$  ab; da ferner Symmetrie um jede Senkrechte zu den Ebenen herrscht, treten nur gewöhnliche Kugelfunktionen auf, so daß der obere Index 0 im Folgenden unterdrückt werden kann, und die Reihe (15) sich auf die Form

$$(15a) \quad \mathfrak{R}_r = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathfrak{A}_m P_m(\cos \vartheta)$$

reduziert.



Unsere Gleichungen (27), (IIb) liefern unter diesen Voraussetzungen durch Substitution von (24) und (24a) das folgende Gleichungssystem

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{d \mathfrak{U}_1}{dx} = 0, \\ \frac{d \mathfrak{U}_0}{dx} + \frac{2}{5} \frac{d \mathfrak{U}_2}{dx} = -\alpha_r \mathfrak{U}_1, \\ \frac{2}{3} \frac{d \mathfrak{U}_1}{dx} + \frac{3}{7} \frac{d \mathfrak{U}_3}{dx} = -\alpha_r \mathfrak{U}_2, \\ \frac{3}{5} \frac{d \mathfrak{U}_2}{dx} + \frac{4}{9} \frac{d \mathfrak{U}_4}{dx} = -\alpha_r \mathfrak{U}_3, \\ \dots \end{array} \right.$$

Die erste Näherung ergibt sich, indem man  $d \mathfrak{U}_2/dx$  in der zweiten Gleichung vernachlässigt und alle folgenden Gleichungen unterdrückt. Man findet so

$$(48) \quad \mathfrak{U}_1 = C_1, \quad \mathfrak{U}_0 = -\alpha_r C_1 x + C_2,$$

wo  $C_1$  und  $C_2$  Integrationskonstanten darstellen; oder, unter Einführung der Strahlungsdichte und des Strahlungsstromes,

$$(49) \quad u_r = \frac{8\pi}{q} (C_2 - \alpha_r C_1 x), \quad \mathfrak{S}_{rx} = \frac{8\pi C_1}{3}.$$

Die Grenzbedingungen erfordern (vgl. S. 10)

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_{r1} = q^2 \Psi(v, T_1) \quad \text{für } x = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \vartheta < \pi/2, \\ \mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_{r2} = q^2 \Psi(v, T_2) \quad \text{für } x = d \quad \text{und} \quad \pi/2 < \vartheta < \pi. \end{array} \right.$$

Bei sehr starker Absorption sind die zugehörigen Werte der Strahlungsdichte so zu berechnen, wie bei der isotropen schwarzen Strahlung (vgl. S. 603), also nach Formel (6)

$$(51) \quad u_{r1} = \frac{8\pi \mathfrak{R}_{r1}}{q}, \quad u_{r2} = \frac{8\pi \mathfrak{R}_{r2}}{q}.$$

Bestimmt man daraus die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ , so findet man folgende Werte für die Strahlungsgrößen

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_{r1} - \frac{x(\mathfrak{R}_{r1} - \mathfrak{R}_{r2})}{d} + \frac{\mathfrak{R}_{r1} - \mathfrak{R}_{r2}}{\alpha_r d} \cos \vartheta, \\ u_r = \frac{8\pi}{q} \left( \mathfrak{R}_{r1} - \frac{x(\mathfrak{R}_{r1} - \mathfrak{R}_{r2})}{d} \right), \\ \varepsilon_r = \alpha_r \left( \mathfrak{R}_{r1} - \frac{x(\mathfrak{R}_{r1} - \mathfrak{R}_{r2})}{d} \right), \\ \mathfrak{S}_{rx} = \frac{8\pi}{3} \frac{\mathfrak{R}_{r1} - \mathfrak{R}_{r2}}{\alpha_r d}. \end{array} \right.$$

Der Strahlungsstrom ist also im Grenzfalle starker Absorption proportional der Differenz der Strahlungsintensitäten der beiden schwarzen Flächen und umgekehrt proportional dem Produkt aus Absorptionskoeffizient und Abstand. Wie schon erwähnt (S. 604) gilt dieser Satz auch, wenn die Wände nicht als schwarz vorausgesetzt werden.

Das Gleichungssystem (47) wird durch die Formeln (48) zusammen mit dem Ansatz

$$(53) \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = \dots = 0$$

vollständig gelöst, man kann aber durch diesen Ansatz nicht den Grenzbedingungen in der Form (50) gerecht werden. Wohl aber stellen (48) und (53) eine strenge Lösung des eindimensionalen Strahlungsproblems dar, wenn für die Ebenen  $x = 0$  und  $x = d$  die Strahlungsdichte  $u_v$ , oder wenn der Strahlungsstrom und  $u_v$  an einer der Ebenen vorgeschrieben werden.<sup>1)</sup> In der Tat überzeugt man sich leicht, daß die Werte (52) den Grundgleichungen (Ib) und (IIb) genügen; die Grenzbedingungen sind aber nur in der Form (51) streng, dagegen in der Form (50) nur näherungsweise für große Werte von  $\alpha_v$  erfüllt.

Physikalisch interessanter ist aber gerade die Einstrahlungsbedingung (50), und um ihr mit zunehmender Näherung zu genügen, muß man die spezielle Annahme (53) aufgeben. Wir stellen uns darum jetzt die Aufgabe, das System (47) bis zur Ordnung  $p = 3$  zu behandeln; dann sind also die hingeschriebenen vier Gleichungen zu lösen, unter Vernachlässigung des Gliedes  $d \mathfrak{A}_4 / dx$ .

Die einfache Rechnung ergibt als Lösung für  $\mathfrak{R}_v$

$$(54) \quad \mathfrak{R}_v = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \cos \vartheta + \mathfrak{A}_2 P_2(\cos \vartheta) + \mathfrak{A}_3 P_3(\cos \vartheta)$$

mit den Werten

$$(55) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_0 = -\alpha_v C_1 x + C_2 - \frac{2}{3}(C_3 e^{-\alpha_v x} + C_4 e^{\alpha_v x}), \\ \mathfrak{A}_1 = C_1, \\ \mathfrak{A}_2 = C_3 e^{-\alpha_v x} + C_4 e^{\alpha_v x}, \\ \mathfrak{A}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}(C_3 e^{-\alpha_v x} - C_4 e^{\alpha_v x}). \end{cases}$$

1) An Stelle von  $u_v$  kann wegen (29) auch der Emissionskoeffizient  $\varepsilon_v$  treten.

Dabei bedeuten  $C_1$  bis  $C_4$  Integrationskonstanten und es ist

$$(56) \quad x_v = \sqrt{\frac{35}{9}} a_v.$$

Um das oben (S. 607 ff.) angegebene Verfahren zur Befriedigung der Grenzbedingungen durchzuführen, ist jetzt zunächst  $\mathfrak{R}_v$  in zwei Bestandteile  $\mathfrak{R}_v^1$  und  $\mathfrak{R}_v^2$  zu spalten, von denen  $\mathfrak{R}_v^1$  mit  $\mathfrak{R}_v$  in den Richtungen

$$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

übereinstimmt und in den Richtungen

$$\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$$

verschwindet, während umgekehrt  $\mathfrak{R}_v^2$  in den letzteren Richtungen mit  $\mathfrak{R}_v$  übereinstimmt und für

$$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

verschwindet. Die Entwicklungen von  $\mathfrak{R}_v^1$  und  $\mathfrak{R}_v^2$  in Reihen von gewöhnlichen Kugelfunktionen ergeben sich ohne weiteres nach den Regeln für die Darstellung willkürlicher Funktionen von  $\vartheta$  durch solche Reihen. Wir werden nur die beiden ersten Glieder gebrauchen und finden so aus (54)

$$(57) \quad \mathfrak{R}_v = \mathfrak{R}_v^1 + \mathfrak{R}_v^2$$

mit der Bedeutung

$$(58) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_v^1 = \left[ \frac{\mathfrak{W}_0}{2} + \frac{\mathfrak{W}_1}{4} - \frac{\mathfrak{W}_2}{8} \right] + \left[ \frac{3\mathfrak{W}_0}{4} + \frac{\mathfrak{W}_1}{2} + \frac{3\mathfrak{W}_2}{16} \right] \cos \vartheta + \dots \\ \mathfrak{R}_v^2 = \left[ \frac{\mathfrak{W}_0}{2} - \frac{\mathfrak{W}_1}{4} + \frac{\mathfrak{W}_2}{8} \right] + \left[ -\frac{3\mathfrak{W}_0}{4} + \frac{\mathfrak{W}_1}{2} - \frac{3\mathfrak{W}_2}{16} \right] \cos \vartheta + \dots \end{cases}$$

Nunmehr ist eine Funktion  $\mathfrak{R}_{v1}^*$  herzustellen, die für

$$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

den konstanten Wert  $\mathfrak{R}_{v1}$  hat und für

$$\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$$

verschwindet, sowie eine zweite Funktion  $\mathfrak{R}_{v2}^*$ , die für

$$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

verschwindet und für

$$\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$$

den Wert  $\mathfrak{R}_{r,2}$  annimmt. Man findet nach den gleichen Regeln

$$(59) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_{r,1}^* = \mathfrak{R}_{r,1} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos \vartheta + \dots \right) \\ \mathfrak{R}_{r,2}^* = \mathfrak{R}_{r,2} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cos \vartheta + \dots \right) \end{cases}$$

Um den Grenzbedingungen (50) zu genügen, muß man jetzt setzen

$$(60) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_{r,1} = \mathfrak{R}_{r,1}^*, & \text{für } x = 0, \\ \mathfrak{R}_{r,2} = \mathfrak{R}_{r,2}^*, & \text{für } x = d. \end{cases}$$

Da vier Konstanten zur Verfügung stehen, kann man den Bedingungen (60) nur bis zur Ordnung  $r=1$  genügen, und es tritt also der oben (S. 608) gekennzeichnete Fall ein, daß  $r < p$  ist. Würde für  $r$  der Wert  $r^*$  vorgeschrieben, so müßte das System (47) bis zur Ordnung  $p = 2r^* + 1$  behandelt werden. Es leuchtet ein, daß die mit den beiden Anfangsgliedern der Reihen (58) und (59) erreichte Annäherung an die Bedingungen (50) nur sehr mangelhaft ist, die Rechnung läßt sich auch ohne große Mühe um einige Glieder weiter treiben. Im Interesse der Übersichtlichkeit wurde hier die Beschränkung auf 4 Glieder in der Reihe (54) eingeführt, weil alles Prinzipielle der Methode und der Resultate schon so erkennbar ist.

Die Substitution von (58) und (59) in (60) und die Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Ordnung ergibt nun folgende 4 Gleichungen für die Unbekannten  $C_1$  bis  $C_4$ :

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{C_2}{2} + \frac{C_1}{4} - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{5}} \right) C_3 - \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{5}} \right) C_4 = \frac{\mathfrak{R}_{r,1}}{2}, \\ & \frac{C_2}{2} - \left( \frac{1}{4} + \frac{\alpha_r d}{2} \right) C_1 - \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{5}} \right) C_3 e^{-\alpha_r d} \\ & \quad - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{5}} \right) C_4 e^{\alpha_r d} = \frac{\mathfrak{R}_{r,2}}{2}, \\ & \frac{3C_2}{4} + \frac{C_1}{2} - \frac{9}{80} C_3 - \frac{9}{80} C_4 = \frac{3\mathfrak{R}_{r,1}}{4}, \\ & -\frac{3C_2}{4} + \left( \frac{1}{2} + \frac{3\alpha_r d}{4} \right) C_1 + \frac{9}{80} C_3 e^{-\alpha_r d} + \frac{9}{80} C_4 e^{\alpha_r d} \\ & \quad = -\frac{3\mathfrak{R}_{r,2}}{4}. \end{aligned} \right.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} D = \frac{3}{320} & \left[ \left( 36 + 30 \sqrt{\frac{7}{5}} \right) \alpha_v d e^{\kappa_v d} + \left( 51 + 43 \sqrt{\frac{7}{5}} \right) e^{\kappa_v d} \right. \\ & - 6 \sqrt{\frac{7}{5}} + \left( -36 + 30 \sqrt{\frac{7}{5}} \right) \alpha_v d e^{-\kappa_v d} \\ & \left. + \left( -51 + 43 \sqrt{\frac{7}{5}} \right) e^{-\kappa_v d} \right] \end{aligned} \right.$$

ist stets von Null verschieden, und die Lösung lautet

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= \frac{9}{32} \frac{\Re_{v1} - \Re_{v2}}{D} \left[ \left( \frac{6}{5} + \sqrt{\frac{7}{5}} \right) e^{\kappa_v d} - \left( \frac{6}{5} - \sqrt{\frac{7}{5}} \right) e^{-\kappa_v d} \right], \\ C_2 &= \Re_{v1} - \frac{3}{640} \frac{\Re_{v1} - \Re_{v2}}{D} \left[ \left( 51 + 43 \sqrt{\frac{7}{5}} \right) e^{\kappa_v d} \right. \\ & \quad \left. - \left( 51 - 43 \sqrt{\frac{7}{5}} \right) e^{-\kappa_v d} - 6 \sqrt{\frac{7}{5}} \right], \\ C_3 &= -\frac{3}{32} \frac{\Re_{v1} - \Re_{v2}}{D} \left[ \left( 1 + \sqrt{\frac{7}{5}} \right) e^{\kappa_v d} + \left( 1 - \sqrt{\frac{7}{5}} \right) \right], \\ C_4 &= \frac{3}{32} \frac{\Re_{v1} - \Re_{v2}}{D} \left[ \left( 1 - \sqrt{\frac{7}{5}} \right) e^{-\kappa_v d} + \left( 1 + \sqrt{\frac{7}{5}} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Wir machen nun folgende einschränkende Annahme über die Größe von  $\alpha_v$ : bedeute  $\delta_v$  eine solche Strecke, daß die Strahlung von der Schwingungszahl  $\nu$  über diese Strecke bis auf  $1/100$  ihrer Intensität geschwächt wird (dafür muß  $\alpha_v \delta_v = 4,6$  sein), so sei  $\delta_v$  wesentlich kleiner als  $d$ . Unter diesen Umständen wird  $e^{\kappa_v d}$  eine sehr große, bzw.  $e^{-\kappa_v d}$  eine sehr kleine Zahl.

Die Formeln (63) lassen erkennen, daß dann  $C_3 e^{-\nu x}$  nur für kleine Werte von  $x$ , d. h. in der Nachbarschaft der Wand  $E_1$ , und  $C_4 e^{\kappa_v x}$  nur für kleine Werte von  $(d - x)$ , d. h. in der Nähe der Wand  $E_2$ , merklich von Null verschieden sein wird, und zwar beides in Schichten, deren Dicke von der Größenordnung  $\delta_v$  ist. Also ist die Lösung (55) auch nur in diesen Schichten von der ersten Näherung (48) verschieden. Mit zunehmendem Werte von  $\alpha_v$  ziehen sich die Übergangsschichten in denen die Lösung (48) nicht gilt, wie schon oben (S. 601) ausgeführt wurde, immer mehr zusammen und dürfen im Falle  $d \gg \delta_v$  vernachlässigt werden, wie wir es getan haben.

Für große Werte von  $\alpha_v d$  erhält man aus (63)

$$(63a) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2}}{\alpha_v d} \left[ 1 - \frac{b_1}{\alpha_v d} \right], \\ C_2 = \mathfrak{R}_{v1} - \frac{b_1}{2} \frac{\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2}}{\alpha_v d} \left[ 1 - \frac{b_1}{\alpha_v d} \right], \\ C_3 = b_2 \frac{\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2}}{\alpha_v d} \left[ 1 - \frac{b_1}{\alpha_v d} \right], \\ C_4 = -b_2 \frac{\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2}}{\alpha_v d e^{\alpha_v d}} \left[ 1 - \frac{b_1}{\alpha_v d} \right], \end{cases}$$

wobei

$$b_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{5}}, \quad b_2 = \frac{5}{6} (1 - \sqrt{\frac{7}{5}})$$

gesetzt ist.

Setzt man diese Werte in (55) ein, so ergibt sich für Strahlungsstrom und Strahlungsdichte (nach (18) und (16))

$$(64) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_{vz} = \frac{8\pi}{3} \frac{\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2}}{\alpha_v d} \left[ 1 - \frac{b_1}{\alpha_v d} \right] \\ u_v = \frac{8\pi}{q} \left\{ \mathfrak{R}_{v1} - \frac{x}{d} (\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2}) - \frac{\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2}}{\alpha_v d} \right. \\ \quad \left. \left[ \frac{b_1}{2} \left( 1 - \frac{2x}{d} \right) + \frac{2b_2}{5} (e^{-\alpha_v x} - e^{-\alpha_v (d-x)}) \right] \right\}. \end{cases}$$

Diese Werte unterscheiden sich von den entsprechenden Werten erster Näherung (man vergl. die Formeln (52)) nur um Glieder, welche um die Ordnung  $1/\alpha_v d$  kleiner sind. Um Beträge von derselben Ordnung ist die Strahlungsdichte unmittelbar an der Wand  $E_1$  kleiner, und unmittelbar an der Wand  $E_2$  größer, als durch (51) angegeben wird. Es bestätigt sich also durch Rechnung, zunächst für ebene Wände, unsere frühere Annahme, daß die Strahlungsdichte unmittelbar an einer schwarzen Wand mit zunehmender Absorption sich dem Werte annähert, der in der isotropen Strahlung in einem geschlossenen Raum von der Temperatur der Wand herrschen würde. Der Grenzwert für sehr starke Absorption ist unabhängig von der Temperatur der zweiten Wand. Es leuchtet ein, daß man diese Resultate ohne weiteres auf eine gekrümmte Fläche übertragen darf, wenn die Strecke  $\delta_v$  klein gegen die Krümmungsradien der Fläche ist. Unter dieser Einschränkung haben wir also die Berechtigung der Grenzbedingung erwiesen, die wir bei der allgemeinen Behandlung der ersten Approximation eingeführt haben (S. 603).

Unsere Behandlung des eindimensionalen Problems hat gezeigt, daß „starke Absorption“ dann vorliegt, wenn  $\delta_v$  klein gegen  $d$  ist. Auch dieses Ergebnis kann nicht auf die spezielle Form des durchgeführten Beispiels beschränkt sein, und so ergibt sich nachträglich die Begründung für die früher (S. 601) gegebene Kennzeichnung des Grenzfalles starker Absorption.

Nimmt man bei der Behandlung des Systems (47) eine weitere Gleichung hinzu, so ändern sich dadurch nur die numerischen Koeffizienten der Lösung (55). Treibt man aber die Annäherung bis zum Gliede  $\mathfrak{A}_5$  einschließlich, so treten in der Lösung an Stelle der beiden Exponentialglieder vier solche Glieder auf, deren Exponenten proportional  $a_v x$  und paarweise entgegengesetzt gleich sind. Die erzielte Verbesserung betrifft also wiederum nur die Übergangsschichten an den Wänden. Je weiter man die Annäherung treibt, desto größer darf  $\delta_v$  im Verhältnis zu  $d$  werden, aber der Fall schwacher Absorption läßt sich auf diesem Wege natürlich nicht behandeln.

b) *Schwache Absorption.* Für diesen Fall gehen wir bei der Behandlung des stationären Zustandes nicht von unseren Grundgleichungen (Ib) und (IIb) aus, sondern von der Hilbertschen Integralgleichung, die schon in der Einleitung erwähnt wurde, und in der nicht  $\mathfrak{R}_v$ , sondern der Emissionskoeffizient  $\varepsilon_v$  als fundamentale Unbekannte auftritt.

Setzen wir zur Vereinfachung

$$(65) \quad \varepsilon_v^* = \varepsilon_v + \mathfrak{E}_v,$$

so lautet die Hilbertsche Gleichung in unserer Bezeichnungsweise<sup>1)</sup>

$$(III) \quad \varepsilon_v^* - \frac{\alpha_v}{4\pi q^2} \int \frac{e^{-\left| \int_{xyz}^{x_1 y_1 z_1} a_v ds \right|}}{S(x_1 y_1 z_1, xyz)} \varepsilon_v^*(x_1, y_1, z_1) dv_1 = \mathfrak{E}_v.$$

Dabei bedeuten  $x, y, z$  die Koordinaten des „Aufpunktes  $P$ “ (für den  $\varepsilon_v$  berechnet werden soll),  $x_1, y_1, z_1$  diejenigen des Integrationselementes  $dv_1$  und

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

1) D. Hilbert, a. a. O. Formeln (25) und (9);  $\eta$  bei Hilbert ist durch  $8\pi \varepsilon_v^*$ ,  $w$  durch  $8\pi \mathfrak{E}_v$  und  $a$  durch  $a_v$  zu ersetzen.

das Bogenelement eines Strahles. Die Größe  $S$  ist eine symmetrische Funktion in bezug auf die beiden Punkte  $x, y, z$  und  $x_1, y_1, z_1$ , von der wir im Folgenden nur zu wissen brauchen, daß  $q^2 S$  in einem Medium mit konstanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $q$  das Quadrat der Entfernung  $r$  der beiden Punkte darstellt. Die Integration in III ist über den ganzen mit Materie erfüllten Raum zu erstrecken (der gegebenenfalls noch mehrfach überdeckt zu nehmen ist).<sup>1)</sup>

Bei Hilbert ist das Feld, einschließlich seiner Grenzen, als kontinuierlich mit Materie erfüllt gedacht, so daß z. B. auch der Übergang in schwarze Wände stetig erfolgt. Demgemäß sind auch  $q$  und  $\alpha_v$  in (III) als Funktionen des Ortes anzusehen. Der von uns betrachtete Fall — homogenes Medium mit schwarzen Wänden — ist also durch eine Grenzbetrachtung aus (III) abzuleiten. Denkt man sich den Übergang zur Begrenzung zuerst stetig innerhalb einer dünnen Schicht, und läßt man diese immer dünner werden, so erhellt ohne weiteres, daß im Limes das Integral in (III) in ein Volum- und ein Oberflächenintegral zerfällt. Ersteres liefert den Beitrag des Mediums, letzteres den Beitrag der Wände zum Werte von  $\varepsilon_v^*$  im Aufpunkt. Da die Ausbreitung der Strahlen dann nur noch im Medium  $M$  erfolgt, wird  $\alpha_v$  konstant,  $S$  kann durch  $r^2/q^2$  ersetzt werden und aus (III) wird

$$(IIIa) \quad \left\{ \varepsilon_v^* - \frac{\alpha_v}{4\pi} \int_{v^*} \frac{e^{-\alpha_v r}}{r^3} \varepsilon_v^*(x_1, y_1, z_1) dv_1 - \frac{\alpha_v}{4\pi} \int_{f^*} \frac{e^{-\alpha_v r}}{r^2} \right. \\ \left. \overline{\mathfrak{K}}_v(x_1, y_1, z_1) \cos(Nr) df_1 = \mathfrak{E}_v. \right.$$

Hier bedeutet  $(Nr)$  den Winkel zwischen  $r$  und der Normale  $N$  des Flächenelements der Begrenzung  $df_1$ ;  $\overline{\mathfrak{K}}_v$  ist die Intensität der von einem Flächenelement ausgehenden Strahlung und reduziert sich also an jeder Oberfläche  $O_i$  auf das  $\mathfrak{K}_{v,i}$  der Grenzbedingung (14). Die Integrationen in (III) sind über diejenigen Teile des Feldes und seiner Begrenzung,  $v^*$  und  $f^*$ , auszudehnen, die — wie man sich kurz ausdrücken kann — vom Punkte  $P$  aus sichtbar sind, denn nur diese senden bei der geradlinigen Ausbreitung der Strahlung Energie nach  $P$ .

Die Überlegenheit der Gleichung (IIIa) über unseren bis-

1) D. Hilbert a. a. O., S. 1058.



herigen Ansatz bei schwacher Absorption liegt klar zutage, denn hier sind die Grenzbedingungen mit in die Grundgleichung des Problems aufgenommen. Die Strahlungsintensität  $\mathfrak{R}_v$  ergibt sich nach der Hilbertschen Methode, wenn  $\varepsilon_v^*$  gefunden ist, durch eine Quadratur. Es wird nämlich unter den Hilbertschen Annahmen<sup>1)</sup>

$$(IV) \quad \mathfrak{R}_v = \frac{1}{q^2} \int_0^\infty q_1^2 \varepsilon_v^*(x_1, y_1, z_1) e^{-\left| \int_{xy}^{x_1 y_1 z_1} a_v ds \right|} ds_1,$$

wo  $q_1$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an der Stelle  $x_1, y_1, z_1$  bedeutet und die Integration längs eines gegebenen Strahles zu erstrecken ist. Gehen wir wieder zu dem von uns untersuchten, unstetig begrenzten Felde über, so ist die Integration nur bis zu dem Punkte  $Q$  fortzusetzen, bei dem der betrachtete Strahl in das Feld eintritt. Sei  $r_0$  die Entfernung  $PQ$  und sei wiederum  $\overline{\mathfrak{R}}_v$  die Intensität der von der schwarzen Grenzfläche bei  $Q$  emittierten Strahlung, so daß also  $\overline{\mathfrak{R}}_v$  mit einem der Werte  $\mathfrak{R}_{v,i}$  zusammenfällt, so wird aus (IV)

$$(IVa) \quad \mathfrak{R}_v = \overline{\mathfrak{R}}_v e^{-a_v r_0} + \int_0^{r_0} e^{-a_v r} \varepsilon_v^*(x_1, y_1, z_1) dr_1.$$

Aus dieser Formel erkennt man ohne weiteres, daß  $\mathfrak{R}_v$  im reinen Vakuum im allgemeinen eine unstetige Funktion der Richtung ist, wie schon früher erwähnt wurde. Denn im Vakuum reduziert sich die rechte Seite auf  $\mathfrak{R}_{v,i}$  und diese Größe wird in allen den Richtungen unstetig, in denen verschieden temperierte Oberflächen im Gesichtsfelde eines bei  $P$  befindlichen Beobachters zusammenstoßen.

Mit (IIIa) und (IVa) haben wir die Gleichungen gewonnen, die sich zur Behandlung unseres Problems bei schwacher Absorption eignen. Wir haben diese Gleichungen aus den Hilbertschen durch passende Spezialisierung abgeleitet. Der Verf. verdankt Hrn. Prof. Herglotz den Hinweis, daß man ohne Mühe unmittelbar von den Grundgleichungen (Ib) und (IIb) zu (IIIa) und (IVa) gelangen kann.

1) D. Hilbert, a. a. O. S. 1063, Spalte 1;  $H$  ist durch  $2\mathfrak{R}_v$  zu ersetzen.



das Strahlungsfeld in gewissen Richtungen sich bis ins Unendliche erstreckt. Ist dagegen das Feld in allen Richtungen begrenzt, so darf man die Funktion  $e^{-\alpha_v r}$  unter den Integrationszeichen in (IIIa) entwickeln, kann dann nach Potenzen von  $\alpha_v$  ordnen und ist auf diese Weise sicher, daß man auf keine Glieder von neuer Ordnung in  $\alpha_v$  stößt.

Als Beispiel für das angegebene Verfahren betrachten wir den schon oben (S. 26ff.) behandelten eindimensionalen Fall mit denselben Bezeichnungen wie dort. Wir finden nach (67) für die beiden ersten Glieder

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{v1} = \mathfrak{E}_v = 0, \\ \varepsilon_{v1} = \frac{\mathfrak{R}_{v1}}{4\pi} \int_{E_1} \frac{e^{-\alpha_v r}}{r^2} \cos(Nr) df_1 + \frac{\mathfrak{R}_{v2}}{4\pi} \int_{E_2} \frac{e^{-\alpha_v r}}{r^2} \cos(Nr) df_2, \end{array} \right.$$

wo das erste Integral über die Ebene  $E_1$  und das zweite über die Ebene  $E_2$  zu erstrecken ist. Um das erste Integral in  $\varepsilon_{v1}$  für einen Aufpunkt mit der Abszisse  $x$  zu finden, führen wir den schon früher benutzten Winkel  $\vartheta$  zwischen der Normale  $N$  und dem Abstand  $r$  als Integrationsvariable ein. Es wird dann der Wert dieses Integrals

$$(69) \quad \frac{\mathfrak{R}_{v1}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\alpha_v x}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta,$$

oder, nach weiterer Substitution der Variablen  $\frac{\alpha_v x}{\cos \vartheta} = z$ ,

$$(70) \quad \frac{\alpha_v x \mathfrak{R}_{v1}}{2} \int_{\alpha_v x}^{\infty} \frac{e^{-z} dz}{z^2} = \frac{\mathfrak{R}_{v1}}{2} [e^{-\alpha_v x} + \alpha_v x Ei(-\alpha_v x)],$$

wobei unter

$$(71) \quad Ei(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u} du$$

in der üblichen Schreibweise der Integrallogarithmus verstanden ist.

Hier liegt der oben angedeutete Fall vor, daß man  $e^{-\alpha_v r}$  nicht vor Ausführung der Quadratur nach steigenden Potenzen von  $\alpha_v$  entwickeln darf, weil das Integrationsgebiet in der  $y$ - und  $z$ -Richtung unbegrenzt ist. Man erkennt an der Form (69) ohne weiteres, daß dann unendliche Summanden auftreten würden.

In derselben Weise erhält man für das zweite Integral in dem Ausdruck für  $\varepsilon_{v1}$

$$(72) \quad \frac{\mathfrak{R}_{v2}}{2} [e^{-\alpha_v(d-x)} + \alpha_v(d-x) Ei(-\alpha_v(d-x))].$$

Wir stellen uns nun zur Aufgabe,  $\varepsilon_v$  bis einschließlich der zweiten Ordnung in  $\alpha_v$  zu berechnen; dann brauchen wir in (70) und (72) nur diejenigen Glieder beizubehalten, die höchstens von erster Ordnung sind (wegen (66)). So ergibt sich

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{v1} &= \frac{\mathfrak{R}_{v1} + \mathfrak{R}_{v2}}{2} - \frac{\alpha_v x \mathfrak{R}_{v1}}{2} \left( \lg \frac{1}{\alpha_v x} + 1 - C \right) \\ &\quad - \frac{\alpha_v (d-x) \mathfrak{R}_{v2}}{2} \left( \lg \frac{1}{\alpha_v (d-x)} + 1 - C \right) + \dots, \end{aligned} \right.$$

wobei  $C = 0,5772$  die Eulersche Konstante ist.

Bei der Berechnung von  $\varepsilon_{v2}$  braucht nur das erste Glied von  $\varepsilon_{v1}$  beibehalten zu werden. Man findet durch ähnliche Rechnungen wie oben

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{v2} &= \frac{\mathfrak{R}_{v1} + \mathfrak{R}_{v2}}{4} \left\{ x \left( \lg \frac{1}{\alpha_v x} + 1 - C \right) + (d-x) \right. \\ &\quad \left. \left( \lg \frac{1}{\alpha_v (d-x)} + 1 - C \right) \right\} + \dots, \end{aligned} \right.$$

so daß man schließlich für  $\varepsilon_v$  gemäß (66) erhält

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_v &= \alpha_v \left( \frac{\mathfrak{R}_{v1} + \mathfrak{R}_{v2}}{2} \right) - \alpha_v^2 \left( \frac{\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2}}{4} \right) \left\{ x \left( \lg \frac{1}{\alpha_v x} + 1 - C \right) \right. \\ &\quad \left. - (d-x) \left( \lg \frac{1}{\alpha_v (d-x)} + 1 - C \right) \right\} + \dots \end{aligned} \right.$$

Diese Formel ist genau bis auf Glieder, die gegen  $\alpha_v^2$  verschwinden. Sind die beiden Wände  $E_1$  und  $E_2$  gleich temperiert und verschwindet demgemäß die Differenz  $(\mathfrak{R}_{v1} - \mathfrak{R}_{v2})$ , so reduziert sich (75), wie nicht anders zu erwarten, auf den Wert (30). Ist dagegen  $\mathfrak{R}_{v1} > \mathfrak{R}_{v2}$  und — der Annahme schwacher Absorption entsprechend —  $\alpha_v d$  eine kleine Zahl, so ist der Emissionskoeffizient für

$$0 < x < \frac{d}{2}$$

größer, und für

$$\frac{d}{2} < x < d$$

kleiner als der Mittelwert

$$\frac{\alpha_v (\mathfrak{R}_{v1} + \mathfrak{R}_{v2})}{2},$$

der an der Stelle  $x = d/2$  herrscht.

Durch Eintragen von (75) in (IVa) erhält man jetzt  $\mathfrak{R}_v$ ; wir begnügen uns damit, die Rechnung bis zu Gliedern erster Ordnung in  $\alpha_v$  zu führen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $\vartheta$  spitz oder stumpf ist. Ist ersteres der Fall, so wird

$$(76) \quad \mathfrak{R}_v = \mathfrak{R}_{v,1} e^{-\frac{\alpha_v x}{\cos \vartheta}} + \int_0^{x/\cos \vartheta} e^{-\alpha_v r} \cdot \alpha_v \frac{\mathfrak{R}_{v,1} + \mathfrak{R}_{v,2}}{2} dr, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

oder nach Ausführung der Integration

$$(77) \quad \mathfrak{R}_v = \frac{\mathfrak{R}_{v,1}}{2} \left( 1 + e^{-\frac{\alpha_v x}{\cos \vartheta}} \right) + \frac{\mathfrak{R}_{v,2}}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha_v x}{\cos \vartheta}} \right), \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ist dagegen  $\vartheta$  stumpf, so setzen wir

$$(78) \quad \delta = \pi - \vartheta$$

und finden durch die gleiche Rechnung

$$(79) \quad \left\{ \mathfrak{R}_v = \frac{\mathfrak{R}_{v,1}}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha_v (d-x)}{\cos \delta}} \right) + \frac{\mathfrak{R}_{v,2}}{2} \left( 1 + e^{-\frac{\alpha_v (d-x)}{\cos \delta}} \right), \right. \\ \left. 0 \leq \delta = \pi - \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Im reinen Äther, d. h. für  $\alpha_v = 0$ , wäre  $\mathfrak{R}_v = \mathfrak{R}_{v,1}$  für alle spitzen Winkel  $\vartheta$  und  $\mathfrak{R}_v = \mathfrak{R}_{v,2}$  für  $\vartheta > \pi/2$ . Gegenüber dieser unstetigen Lösung bewirkt die Absorption einen Ausgleich, wie die Formeln (77) und (79) deutlich zeigen: in den Richtungen  $\vartheta < \pi/2$  ist die Strahlungsintensität gegen  $\mathfrak{R}_{v,1}$  geschwächt, in den Richtungen  $\vartheta > \pi/2$  gegen  $\mathfrak{R}_{v,2}$  verstärkt. Für  $\vartheta = \pi/2$  gehen (77) und (79) stetig ineinander über, wie klein auch  $\alpha_v$  sein mag.

Es ist wiederum zu beachten, daß man in (76) nicht unter dem Integrationszeichen nach  $\alpha_v$  entwickeln darf, und auch nicht in der integrierten Form (77) bzw. (79), weil sonst die Lösung für  $\vartheta = \pi/2$  hinfällig werden würde.

Zur Bestimmung des Strahlungsstromes denken wir uns eine Flächeneinheit an der Stelle  $x$  senkrecht zur  $x$ -Achse gestellt und berechnen die Energie, die in der Zeiteinheit insgesamt von der Seite kleinerer  $x$  zur Seite größerer  $x$  hindurchtritt. Auf Grund von (77) findet man unter Berücksichtigung von Gliedern erster Ordnung

$$(80) \quad 2\pi [\mathfrak{R}_{v,1} (1 - \alpha_v x) + \mathfrak{R}_{v,2} \alpha_v x],$$

und in umgekehrter Richtung beträgt die Energiestrahlung auf Grund von (79)

$$(81) \quad 2\pi [\mathfrak{R}_{,1} a_v (d - x) + \mathfrak{R}_{,2} (1 - a_v (d - x))].$$

Der Strahlungsstrom ist durch die Differenz von (80) und (81) gegeben und beträgt also

$$(82) \quad \mathfrak{S}_{,x} = 2\pi (\mathfrak{R}_{,1} - \mathfrak{R}_{,2}) (1 - a_v d).$$

Er ist, wie es sein muß, von  $x$  unabhängig (während (80) und (81) noch  $x$  enthalten), und reduziert sich für  $a_v = 0$  auf den im Vakuum gültigen Wert  $2\pi (\mathfrak{R}_{,1} - \mathfrak{R}_{,2})$ . Der Strahlungsstrom verschwindet natürlich mit der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Wänden.

Zeichnet man den Strahlungsstrom — bei konstanten Temperaturen der beiden Wände und festem Abstand  $d$  — als Funktion von  $1/a_v$  auf, so zeigt die so entstehende Kurve Sättigungscharakter. In der Tat ist nach (64) für kleine Werte von  $1/a_v$  der Strahlungsstrom proportional  $1/a_v$  und erreicht mit zunehmendem  $1/a_v$  schließlich den im Vakuum gültigen „Sättigungswert“.

Es ist nicht ohne Interesse, daß man eine einfache Näherungsformel erhält, welche für alle Werte von  $a_v$  brauchbar ist, wenn man die auf S. 610 ff. auseinandergesetzte Methode der Konstantenbestimmung schon auf den Fall anwendet, daß man in dem System (47) nur  $\mathfrak{M}_0$  und  $\mathfrak{M}_1$  beibehält.

Setzt man nämlich die Werte (48) in (58) ein und streicht  $\mathfrak{M}_3$ , so ergibt sich

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_{,1} &= \left[ \frac{C_2}{2} - \frac{a_v C_1 x}{2} + \frac{C_1}{4} \right] + \left[ \frac{3C_2}{4} - \frac{3a_v C_1 x}{4} + \frac{C_1}{2} \right] \cos \vartheta + \dots \\ \mathfrak{R}_{,2} &= \left[ \frac{C_2}{2} - \frac{a_v C_1 x}{2} - \frac{C_1}{4} \right] + \left[ -\frac{3C_2}{4} + \frac{3a_v C_1 x}{4} + \frac{C_1}{2} \right] \cos \vartheta + \dots \end{aligned} \right.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (60) sind die Konstanten zu bestimmen. Da man jetzt nur zwei Konstanten zur Verfügung hat, kann man die Übereinstimmung nur für die Absolutglieder *oder* für die Glieder erster Ordnung erzielen, und die ungenügende Approximation zeigt sich darin, daß beides zu verschiedenen Resultaten führt. Wählt man aber die Glieder erster Ordnung, so findet man daraus

$$(84) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_{v,x} = \frac{2\pi(\mathfrak{R}_{v,1} - \mathfrak{R}_{v,2})}{1 + \frac{1}{4}\alpha_v d}, \\ u_v = \frac{4\pi}{q} \left\{ \frac{\mathfrak{R}_{v,1} + \mathfrak{R}_{v,2} + \frac{1}{4}\alpha_v [\mathfrak{R}_{v,1}(d-x) + \mathfrak{R}_{v,2}x]}{1 + \frac{1}{4}\alpha_v d} \right\}. \end{cases}$$

Diese geschlossenen Näherungsformeln sind sowohl für  $\alpha_v = 0$ , wie für  $\alpha_v d \gg 1$  in Übereinstimmung mit den früher gewonnenen Ergebnissen.

Bei der bisherigen Behandlung stationärer Zustände ist nach der Temperaturverteilung im Strahlungsfelde nicht gefragt worden. Die Gleichungen (Ib) und (IIb) enthalten die Temperatur nicht, und  $T$  geht nur insofern ein, als die Grenzbedingungen (14) von den Temperaturen der Grenzflächen abhängig sind. Man kann das Problem vom strahlungstheoretischen Standpunkte aus als erledigt ansehen, wenn der Strahlungszustand, d. h. also  $\mathfrak{R}_v$  und die daraus abgeleiteten Größen, bekannt sind.

Die Berechtigung für diesen Standpunkt ergibt sich daraus, daß die Frage nach der Temperatur — als einer Funktion des Orts im Felde — gar nicht beantwortet werden kann, ohne daß man eine neue physikalisch wichtige Annahme einführt. Es muß nämlich dann der Zusammenhang zwischen der Temperatur des Mediums  $M$  und einer der Strahlungsvariablen als bekannt vorausgesetzt werden, während bisher nur das Gesetz für die Emission der schwarzen Wände als gegeben angenommen wurde.

Es wurde schon bei früherer Gelegenheit (S. 9) betont, daß es am nächsten liegt, die Gültigkeit des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes, etwa in der Form (12), auch für die anisotrope Strahlung anzunehmen. Tut man das, so braucht man nur nach den bisher angegebenen Verfahren  $u_v$  für jede Farbe und daraus  $u$  zu berechnen, um die Temperatur für jede Stelle des Feldes ermitteln zu können.

Die so bestimmte Temperatur zeigt nun an den begrenzenden Wänden im allgemeinen einen endlichen Sprung, und das ist kennzeichnend für jede Theorie, in der Wärmeübertragung lediglich durch Strahlung berücksichtigt wird. Fließt nämlich durch ein schwarzes Oberflächenelement  $df$  von der Temperatur  $T$  ein Strahlungsstrom von endlicher Dichte, so muß die Strahlungsintensität mindestens in einem endlichen, auf  $df$  zuführenden Öffnungskegel einen anderen Wert haben als

in den von  $df$  ausgehenden Richtungen. Also muß die Strahlungsdichte um einen endlichen Betrag von derjenigen verschieden sein, welche der Temperatur  $T$  zukommt, und die nach (12) berechnete Temperatur unmittelbar an der Wand ergibt sich verschieden von der Temperatur der Wand selbst.

Diese allgemeine Tatsache wird auch durch das von uns gerechnete Beispiel bestätigt. Bei schwacher Absorption ist die Strahlungsdichte [nach (75) und (29)] bis auf Glieder von der Ordnung  $\alpha_r$  im ganzen Raum konstant, und die Temperatur hat — mit derselben Annäherung — den konstanten Wert  $T_m$ , der sich aus der Gleichung

$$(85) \quad T_m^4 = \frac{1}{2} (T_1^4 + T_2^4)$$

berechnet. Bei starker Absorption ist  $u_r$  nach (64) für jeden endlichen Wert von  $\alpha_r$  unmittelbar an einer der Wände von  $u_{r,1}$  bzw.  $u_{r,2}$  um einen endlichen Betrag verschieden, und demnach auch ein Temperatursprung an der Wand vorhanden.

Unter den tatsächlichen Verhältnissen wird sich naturgemäß ein solcher Temperatursprung zwischen der Wand und einem Medium von endlicher Dichte nicht ausbilden können, sondern die Wärmeleitung wird einen stetigen Temperaturverlauf bewirken und darf demnach — mindestens an den Grenzen — nicht ganz vernachlässigt werden. Das ist ein weiterer Grund zugunsten der Auffassung, die wir oben vertreten haben (S. 603ff.), daß man bei starker Absorption die Strahlungsdichte unmittelbar an der Wand aus der Temperatur dieser Wand berechnen dürfe.

### § 3. Nichtstationäre Zustände.

Hängt der Strahlungszustand von der Zeit ab, so treten wesentlich kompliziertere Verhältnisse auf. Um zu der Grundgleichung in der Form (Ia) für *monochromatische* Strahlung zu gelangen, mußten wir nicht nur annehmen (S. 592), daß die Kontinuitätsbeziehung für die Energie von jeder Schwingungszahl einzeln genommen gelten soll, sondern außerdem noch, daß die Änderung der materiellen thermischen Energie gegen die Änderung der Strahlungsdichte verschwindet. Diese zweite Annahme ist gewissermaßen die äußerste Konsequenz einer reinen Strahlungstheorie: es wird nicht nur der Wärmetransport durch Materie vernachlässigt, sondern auch die Änderung des Wärmeinhalts der Materie. Nun ist fraglos zuzugeben, daß es theoretisch Verhältnisse geben kann, unter



denen die genannte Voraussetzung zutrifft; denn der Wärmeinhalt ist in erster Annäherung proportional der Temperatur, die Strahlungsdichte aber ihrer vierten Potenz. Immerhin wird der Fall in der Natur nur unter den extremsten Bedingungen annähernd verwirklicht sein. Entweder die Verdünnung des Mediums  $M$  muß sehr groß sein, oder die Temperatur außerordentlich hoch.

Uns interessiert vor allem der Fall starker Absorption, weil nur in diesem Falle Analogien mit der Wärmeleitung und darum einfache Verhältnisse zu erwarten sind. Nach der Eddingtonschen Theorie sind im Inneren der Sterne die Voraussetzungen, welche die Absorption als stark charakterisieren, mit großer Genauigkeit erfüllt.<sup>1)</sup> Im Mittelpunkt eines typischen Riesensternes, dessen Masse 1,5 mal so groß ist wie die Sonnenmasse, herrscht nach Eddington<sup>2)</sup> eine Temperatur von rund  $6,6 \cdot 10^6$  Graden und die Dichte 0,11. Demnach würde das erste Glied in (13) erst etwa zehnmal so groß sein wie das zweite, wenn man die spezifische Wärme so niedrig wie  $0,2 \frac{\text{g-Kal.}}{\text{g-Grad}}$  annimmt. Erst bei Sternen von noch größerer Masse würde das Verhältnis günstiger werden, aber nach der Eddingtonschen Theorie kann gerade die Masse nicht sehr viel größer werden als in dem angenommenen Beispiel.

Trotzdem wollen wir an der ausgesprochenen Annahme festhalten, denn sonst müßte man das auf S. 590 ff. angegebene Verfahren wählen, und dann würden die Gleichungen ihre Linearität verlieren. Wir legen also der weiteren Betrachtung die Grundgleichungen in der Form (Ia) und (II) zugrunde, substituieren die Reihe (15) und vergleichen zum Schluß die Koeffizienten gleicher Kugelfunktionsglieder.

Gleichung (Ia) liefert jetzt an Stelle von (27)

$$(86) \quad \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial t} = -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1^{(1)}}{\partial z} \right) + \mathfrak{E}_r$$

und die Glieder nullter Ordnung von (II) ergeben unter Berücksichtigung von (24) bis (26)

$$(87) \quad \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1^{(1)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial t} \right. \\ \left. = \varepsilon_r + \mathfrak{E}_r - \alpha_r \mathfrak{A}_0^{(0)} \right.$$

1) A. S. Eddington, a. a. O., S. 356.

2) A. S. Eddington, a. a. O., Tab. 4.

Der Vergleich beider Formeln lehrt, daß die Beziehung (32) und demnach der Satz (29) auch im zeitlich veränderlichen Felde gilt.

Nunmehr beschränken wir uns auf den Grenzfall starker Absorption und brechen die Reihe (15) nach den Gliedern erster Ordnung ab. Auf diese Weise erhält man aus (II) die drei Gleichungen

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial x} = -\alpha_v \mathfrak{A}_1^{(0)} - \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(0)}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial y} = -\alpha_v \mathfrak{A}_1^{(1)} - \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{A}_1^{(1)}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_0^{(0)}}{\partial z} = -\alpha_v \mathfrak{B}_1^{(1)} - \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{B}_1^{(1)}}{\partial t}, \end{cases}$$

die mit (86) zusammen genügen, die 4 Unbekannten  $\mathfrak{A}_0^{(0)}$ ,  $\mathfrak{A}_1^{(0)}$ ,  $\mathfrak{A}_1^{(1)}$  und  $\mathfrak{B}_1^{(1)}$  zu bestimmen.

Die Gleichungen (88) unterscheiden sich von den entsprechenden, bei gleicher Näherung für den stationären Zustand gültigen Gleichungen (34) durch die letzten Glieder auf den rechten Seiten. Es gilt also bei zeitlich veränderlichen Vorgängen nicht mehr der Satz, daß bei starker Absorption der Strahlungsstrom dem Gefälle der Strahlungsdichte proportional ist (S. 602); der Faktor  $1/q$  läßt aber vermuten, daß die Zusatzglieder in vielen Fällen ohne Bedeutung sind.

Die Gleichungen (86) und (88) lassen sich, wenn  $\mathfrak{E}_v$  verschwindet, nach der Fourierschen Methode behandeln. Als Beispiel wählen wir den Fall, daß der Zustand nur von  $x$  und  $t$  abhängt; dann erhält man unter der Annahme  $\mathfrak{E}_v = 0$  die Ausgangsgleichungen

$$(89) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{A}_0}{\partial t} = -\frac{q}{s} \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_0}{\partial x} = -\alpha_v \mathfrak{A}_1 - \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial t}. \end{cases}$$

Dieses System wird durch den Ansatz

$$(90) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_0 = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m e^{i\left(\frac{2\pi m}{d}x + pt\right)}, \\ \mathfrak{A}_1 = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m e^{i\left(\frac{2\pi m}{d}x + pt\right)} \end{cases}$$

gelöst, wenn die Beziehungen

$$(91) \quad \begin{cases} p = q \left\{ \frac{i \alpha_v}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{2\pi m}{d} \right)^2 - \frac{\alpha_v^2}{4}} \right\}, \\ b_m = - \frac{8 d p}{2\pi m q} a_m \end{cases}$$

erfüllt sind. Für

$$\frac{\alpha_v^2}{4} > \frac{1}{3} \left( \frac{2\pi m}{d} \right)^2$$

ist das untere Vorzeichen in dem Ausdruck für  $p$  zu nehmen<sup>1)</sup>; andernfalls sind beide Vorzeichen zuzulassen.

Die Koeffizienten  $a_m$  sind noch willkürlich und können, ähnlich wie in der Theorie der Wärmeleitung, so bestimmt werden, daß für  $t=0$  die Strahlungsdichte zwischen  $x=0$  und  $x=d$  eine beliebig vorgegebene Funktion von  $x$  wird, und daß außerdem für alle Zeiten bei  $x=0$  und  $x=d$  entweder die Strahlungsdichte konstant wird oder der Strahlungsstrom verschwindet. Erstere Form der Grenzbedingung entspricht schwarzen Wänden von konstanter Temperatur, letztere Form spiegelnden Wänden. Der gegebene Anfangszustand klingt nach (90) ab, denn  $p$  hat stets einen positiv imaginären Teil.<sup>2)</sup>

Unterdrückt man in der zweiten Gleichung (89) das Glied

$$- \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial t},$$

so erhält man statt der ersten Gleichung (91)

$$(92) \quad p = i \cdot \frac{q}{3\alpha_v} \left( \frac{2\pi m}{d} \right)^2.$$

Auf diesen Wert reduziert sich der frühere Ausdruck für  $p$  unter der Voraussetzung, daß

$$(93) \quad \alpha_v d \gg \sqrt{\frac{16}{3}} \pi m$$

ist. Wenn also  $\alpha_v d$  eine große Zahl ist, wenn ferner die Anfangsverteilung der Strahlungsdichte stetig ist, so daß die Bedingung (93) für alle erforderlichen Ordnungszahlen  $m$  zutrifft, darf man in der zweiten Gleichung (89) das letzte Glied vernachlässigen.

1) Damit sich für große Werte von  $\alpha_v$  der richtige Näherungswert (92) ergibt.

2) In ganz ähnlicher Weise läßt sich der Falle behandeln, daß die Temperatur (bzw. die Strahlungsdichte) für die Ebene  $x=0$  als willkürliche Funktion der Zeit gegeben wird.

Dieses Ergebnis übertragen wir auf den allgemeinen Fall. Setzen wir demgemäß voraus, daß  $\alpha$ , mit der mittleren linearen Abmessung des Strahlungsfeldes multipliziert eine große Zahl ergibt, daß ferner der Anfangszustand keine Unstetigkeiten aufweist, so werden die Gleichungen (34) mit genügender Annäherung an die Stelle von (88) treten können. Dann gilt also auch wieder der in den Gleichungen (36) enthaltene Satz. Wir sehen aber, daß seine Gültigkeit bei zeitlich veränderlichen Vorgängen gegenüber dem stationären Falle wesentlich eingeschränkt ist.

Wird nur die Gesamtstrahlung untersucht, so braucht man wiederum nur auf alle Gleichungen dieses Paragraphen die früher (S. 597) gegebene Regel anzuwenden. Wir behalten alle eingeführten Beschränkungen bei, setzen außerdem noch  $E=0$  und nehmen das Stefan-Boltzmannsche Gesetz als gültig an.

Unter diesen Umständen wird aus (I)

$$(94) \quad \alpha n^2 \frac{\partial T^4}{\partial t} = - \left( \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} \right),$$

und aus (36) werden die Gleichungen (40). Die gesamte Theorie läßt sich also für sehr starke Absorption und extrem hohe Temperaturen in die eine Gleichung

$$(95) \quad \frac{\partial T^4}{\partial t} = \lambda \cdot \nabla^2 T^4$$

zusammenfassen; in dieser Form verrät sich die volle Analogie mit der Theorie der Wärmeleitung, auf die schon früher (S. 23) hingewiesen wurde:  $T^4$  tritt an die Stelle von  $T$  und  $\lambda$  (Formel 41) an die Stelle des Temperaturleitvermögens.

#### § 4. Berücksichtigung der Wärmeleitfähigkeit.

Wir haben bisher angenommen, daß der Einfluß der Wärmeleitfähigkeit völlig vernachlässigt werden kann, ohne zu untersuchen, unter welchen physikalischen Bedingungen eine solche Vernachlässigung statthaft ist. Darum wollen wir nun zum Schluß die Gleichungen unseres Problems durch die Berücksichtigung der Wärmeleitung ergänzen. Wir beschränken uns dabei auf den Fall starker Absorption, der das größte Interesse bietet, denn bei schwacher Absorption wird man die Größe des Strahlungsstromes im allgemeinen ohne Mühe aus den Temperaturen der Wände und der geometrischen Konfiguration abschätzen können.

Die Untersuchung betreffe nur den Gesamtenergiestrom (ohne Rücksicht auf die spektrale Zerlegung der Strahlung), das Stefan-Boltzmannsche Gesetz werde als gültig angenommen und die Absorption sei so stark, daß die Gleichungen (40) auch bei zeitlich veränderlichen Vorgängen eine genügende Annäherung darstellen. Der gesamte Wärmestrom  $\mathfrak{B}$  setzt sich dann aus dem Strahlungsstrom  $\mathfrak{S}$  und dem Leitungsstrom  $\mathfrak{Q}$  zusammen, die beide in der Richtung des stärksten Gefälles der Temperatur fließen. Bedeute  $\kappa$  das Wärmeleitvermögen, so gelten also die phänomenologischen Gleichungen

$$(96) \quad \begin{cases} W_x = -(\kappa + 4\sigma T^3) \frac{\partial T}{\partial x}, & W_y = -(\kappa + 4\sigma T^3) \frac{\partial T}{\partial y}, \\ W_z = -(\kappa + 4\sigma T^3) \frac{\partial T}{\partial z}. \end{cases}$$

Die Kontinuitätsgleichung (I) muß durch die Wärmeleitungsglieder ergänzt werden und lautet dann

$$(97) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \left( \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \right) + 8\pi E,$$

worin  $U$  die Bedeutung

$$(98) \quad U = n^2 a T^4 + \int_0^T c \varrho dT$$

hat. Damit sind die ausreichenden Gleichungen für die Bestimmung von  $T$ ,  $U$  und  $\mathfrak{B}$  gewonnen. Der stationäre Fall läßt sich ohne weiteres nach den Methoden der Theorie der Wärmeleitung behandeln; denn es wird dann, wenn noch  $E = 0$  vorausgesetzt wird, aus (96) und (97)

$$(99) \quad \nabla^2 \Theta = 0,$$

wobei  $\Theta$  folgende Funktion der Temperatur ist

$$(100) \quad \Theta = \kappa T + \sigma T^4.$$

Ist  $T$  für die Begrenzung vorgeschrieben und läßt sich das Wärmeleitungsproblem behandeln, so ist damit auch unser Problem gelöst. Die isothermen Flächen bleiben auch hier Isothermen, aber der Temperaturverlauf ist verändert. Je nach der Größe der Koeffizienten  $\kappa$  und  $\sigma$  nähert sich die Temperaturverteilung den bei ausschließlicher Berücksichtigung der Leitung oder Strahlung gültigen Verhältnissen. Der relative

Einfluß des Strahlungsstromes ist in verschiedenen Teilen des Feldes verschieden, denn er hängt von dem Verhältnis  $4\sigma T^3 : \kappa$  ab (Formel 96). Je höher die Temperatur und je kleiner die Absorption (Formel 41), desto stärker ist der Strahlungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom.

Diese Ergebnisse gelten, soweit sie den stationären Zustand betreffen, wenn nur das Produkt aus dem Absorptionskoeffizienten und der mittleren linearen Abmessung des Feldes eine einigermaßen große Zahl (einige hundert oder mehr) ist. Im Inneren der Sterne, sowohl der Riesensterne von geringer mittlerer Dichte, wie der Zwergsterne von großer mittlerer Dichte, trifft das nach der Eddingtonschen Theorie zu, auch wenn man sich — den Voraussetzungen unserer Theorie entsprechend — auf Gebiete beschränkt, in denen die Dichte als näherungsweise konstant angesehen werden kann.

Eddington gibt für den mittleren Absorptionskoeffizienten den Wert  $a = 23 \cdot \varrho$  an.<sup>1)</sup> Mit Hilfe dieser Zahl und auf Grund der Temperatur- und Dichteverteilungen, die sich aus der Eddingtonschen Theorie für das Innere von Sternen ergeben, läßt sich der Ausdruck  $4\sigma T^3$  als Funktion des Radius berechnen. Es ergibt sich aus den von Eddington gerechneten Beispielen<sup>2)</sup>, daß  $4\sigma T^3$  in Riesensternen unabhängig vom Radius ist und den Wert  $4,3 \cdot 10^8$  g-Kal. cm<sup>-1</sup> sec<sup>-1</sup> grad<sup>-1</sup> hat; in einem Zwergstern von der Masse der Sonne nimmt der Wert vom Zentrum nach außen hin von etwa  $8,3 \cdot 10^6$  auf etwa  $1,7 \cdot 10^6$  ab. Diese Zahlen sind sehr groß gegen alle Werte von  $\kappa$ , die man kennt (das Wärmeleitvermögen des Silbers beträgt bei gewöhnlichen Temperaturen nur 1,01 in denselben Einheiten); die Wirkung der Wärmeleitfähigkeit ist also im Inneren der Sterne, wie bei den extrem hohen Temperaturen vorauszusehen war, völlig gegen die Wärmestrahlung zu vernachlässigen.

---

*Zusatz bei der Korrektur.* Erst nach beendeter Drucklegung der vorstehenden Arbeit sind dem Verfasser durch die Liebenswürdigkeit von Hrn. Prof. Lichtenstein drei wich-

---

1) A. S. Eddington, a. a. O., S. 377.

2) A. S. Eddington, a. a. O., Tabellen 4 und 8.

tige Abhandlungen von Levi-Civita<sup>1)</sup> über die Theorie der Strahlung bekannt geworden. Die beiden letzten dieser Aufsätze („*Sul regime variabile del calore raggiante*“) behandeln im wesentlichen dasselbe Problem, wie obige Arbeit, und enthalten auch eine Reihe von Resultaten, welche der Verfasser hier auf anderem Wege wiedergefunden hat. In aller Kürze möge darum auf die Berührungspunkte und Verschiedenheiten der beiden Untersuchungen hingewiesen werden.

Levi-Civita beschränkt sich von vornherein auf die Gesamtstrahlung und sieht die Temperatur als die fundamentale Variable an, durch welche die Werte des Emissionskoeffizienten, des Absorptionskoeffizienten und der spezifischen Strahlungsintensität an jeder Stelle des Raumes eindeutig festgelegt sind. Des weiteren geht er, wie der Verfasser, von der Überlegung aus, daß im Strahlungsfelde von räumlich oder zeitlich variabler Temperatur die Strahlung nicht isotrop sein kann. Über die Gesetzmäßigkeit dieser Anisotropie wird aber eine ganz bestimmte Hypothese aufgestellt.

Bedeutet nämlich  $H$  die Intensität der anisotropen Strahlung, und sei  $K$  der Wert, den  $H$  in allen Richtungen annehmen würde, wenn an irgendeiner Stelle die Strahlung bei der gleichen Temperatur isotrop wäre — mit anderen Worten:  $K$  entspricht dem Anfangsglied unserer Entwicklung (19) —, so wird die Annahme gemacht, daß für  $H$  in der Richtung  $n$

$$(1^*) \quad H = K - 3k \frac{dK}{dn}$$

gesetzt werden kann; dabei soll  $k$  nicht notwendig konstant sein, sondern darf auch eine positive Funktion von  $T$  bedeuten.

Auf Grund dieser speziellen, durch die Theorie der Wärmeleitung nahegelegten Hypothese wird nun bewiesen, daß die Größe, die wir als Strahlungsstrom bezeichnet haben, Vektorcharakter hat. Ferner werden unter Benutzung derselben Annahme, in mathematisch strenger Form, Ausdrücke für die in einem bestimmten Raumteil des Mediums enthaltene und für die während einer kleinen Zeit absorbierte Energiemenge abgeleitet, und schließlich wird als allgemeine Gleichung der Strahlung eine Beziehung gewonnen, die mit

1) T. Levi-Civita, *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (V) 23. S. 12—21, 371—379, 453—464. 1914.

unserer Gl. (87) gleichbedeutend ist.<sup>1)</sup> Überträgt man dann die Gültigkeit der Relation (29) — bzw. ihres Analogons für die Gesamtstrahlung — ohne weiteres vom isothermen, stationären Fall auf beliebige Zustände, was nach Levi-Civita statthaft ist, weil die charakteristischen Zustandsgrößen durch die Temperatur allein bestimmt sind, so gelangt man auch zu der (86) analogen Gleichung.<sup>1)</sup>

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß die Verhältnisse im beliebigen Strahlungsfelde durch die elementaren Gesetze der Strahlung und geeignete Grenzbedingungen völlig bestimmt sind, so daß eine besondere Hypothese von der Natur der Gleichung (1\*) entbehrlich ist. Andererseits geht aus unseren Rechnungen hervor, daß die Levi-Civitasche Annahme für den Grenzfall starker Absorption eine erste Näherung darstellt, und sie zeigen, welchen Wert der Koeffizient  $k$  in Gl. (1\*) dann annimmt. Ein Vergleich der Gleichung (5') bei Levi-Civita mit unseren Beziehungen (40) und (41) lehrt nämlich, daß  $k$  konstant und  $= 1/3 a$  zu setzen ist.

Im übrigen bedarf es wohl kaum einer Erwähnung, daß in der Untersuchung von Levi-Civita, auf Grund der einmal ausgesprochenen Hypothese, eine Strenge der mathematischen Deduktion eingehalten wird, die in der vorliegenden Arbeit nicht angestrebt wurde.

Leipzig, im Mai 1922.

---

1) Wenn man (87) (bzw. 86) auf die Gesamtstrahlung bezieht, d. h. also nach  $\nu$  integriert denkt, und  $\mathcal{E}_\nu = 0$  setzt.

(Eingegangen 9. Mai 1922.)









## HARTMANN & BRAUN A.-G.

Fabrik elektrischer Meßgeräte.

Frankfurt am Main.



### Elektrodynamometer höchster Genauigkeit nach Brüger.

Mit Spiegel-  
bogen



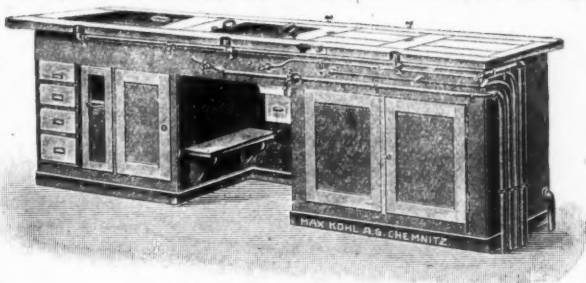
und gleich-  
geteilter Skale.

Strommesser. Spannungsmesser.  
Leistungsmesser.



## Max Kohl A. G. Chemnitz

:: Fabrik physikalischer Apparate ::  
Hörsaal- u. Laboratoriums-Einrichtungen



Experimentiertisch für Physik. 3 m lang.

[7/8.

Rotierende Quecksilber - Hochvakuum - Pumpen  
Ölluftpumpen — Experimentier - Schalttafeln

Preislisten und Sonderangebote bereitwilligst

**Spindler & Hoyer G.m.b.H.**  
**Mechanische und optische Werkstätten**  
**GÖTTINGEN 14**

Apparate für radioaktive und luftelektrische Messungen  
 Normalbatterie für elektrostatische Messungen



Kondensatoren  
 Mikrowage  
 nach Nernst  
 Erdbeben-  
 Registrierapparate  
 nach Wiechert  
 Kino-Optik  
 Lupen  
 Schüler-Mikroskope

**Zeitschrift für technische Physik**

Vorzügliches  
 Insertionsorgan  
 auf jedem Gebiete  
 auch für Stellen-  
 gesuche

**Benutzt die Zeitschrift für technische Physik**

# LEITZ



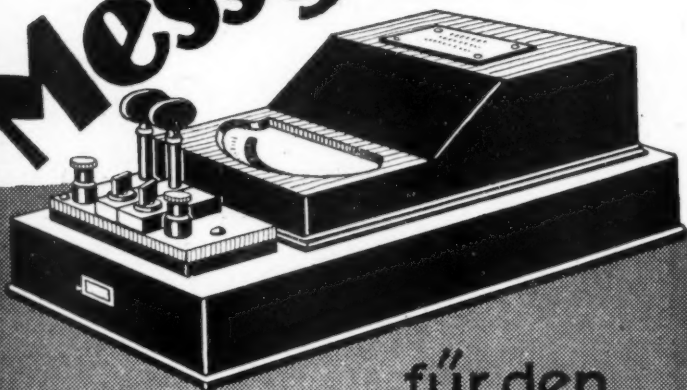
## MIKROSKOPE

für alle wissenschaftlichen Untersuchungen  
im gewöhnlichen u. polarisierten Licht  
**Binokular-Mikroskope · Lupen u. Lupenmikroskope**  
**Mikroskopische Nebenapparate**  
insbesond. für Dunkelfeld- u. Ultramikroskopische Untersuchungen  
**Mikrophotographische- u. Projektions-Apparate**  
**Prismen - Fernrohre**

**ERNST LEITZ** OPTISCHE WERKE **WETZLAR**

Man verlange Sonderliste: Mikro 289

Elektrische  
**Messgeräte**



für den  
**Laboratoriums-  
Gebrauch**



**Siemens & Halske AG**  
WERNERWERK · SIEMENSSTADT BEI BERLIN

# Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

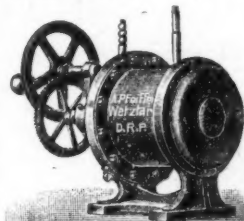
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen  
und für wissenschaftliche Zwecke.

## Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

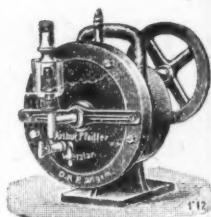
System Pfeiffer, D. R. P.

System Gaede, D. R. P.  
angemeldet

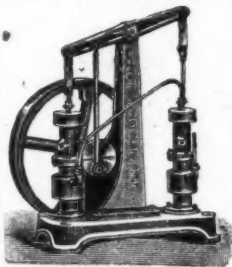


Hochvakuum-  
Apparate  
zur  
Demonstration  
und zu  
wissenschaftlichen  
Untersuchungen.

Neu-  
konstruktionen  
nach Angabe.



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.  
Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



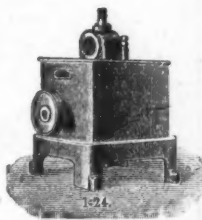
Alle Arten von  
Luftpumpen:

Trockene rotierende  
Luftpumpen,

Trockene Schieber-  
luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen  
aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Elgene Spezial-Fabrikation von FunkenInduktoren von 4-1000<sup>m</sup>/m  
Funkenlänge

Eingetragene



Fabrik-Marke



Induktoren  
mit Demon-  
strations-  
schaltung.

Alle  
Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

all here 72  
23

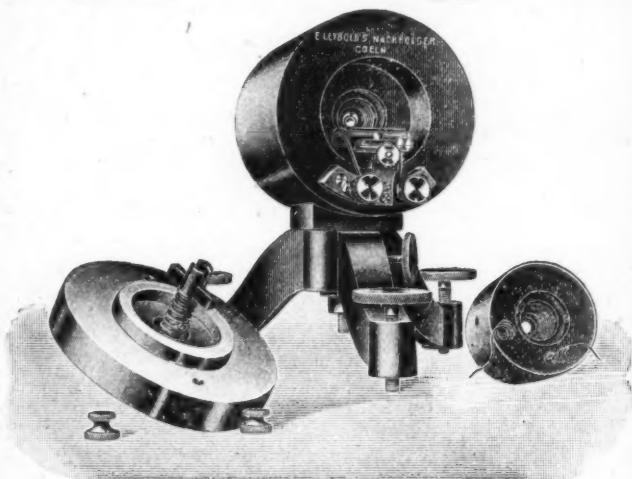
# E. Leybold's Nachf. A.-G.

Zweigniederlassung:  
**Berlin NW 7,**  
Dorotheenstraße 53

**Köln a. Rh.**  
Brüderstraße 7

Telegrammadresse:  
**Scientia Cöln**  
**Scientia Berlin**

## *Fabrik physikalischer Apparate*



**Galvanometer nach Paschen**  
(Physikal. Zeitschrift XIV, S. 521, 1913)

Projektionsapparate für Diaskopie und Episkopie

**Vakuumpumpen nach GAEDE**  
aller Systeme

Ausführliches Preisverzeichnis mit Literaturangaben,  
enthaltend 16000 Nummern, wird auf Wunsch übersandt



